

Bac Mathématiques

Série ES - 2017

Probabilités

**UNIQUEMENT
LE COURS POUR AVOIR
20/20**

alainpiller.fr

1

**ALAIN
PILLER**

PROBAS À DENSITÉ

Rien de plus facile !

BAC MATHS



SAVOIR

TRAINING

INTÉRROS LYCÉES

EXOS ANNALES BAC

TERM.
ES,L

PREMIUM ÉDITEUR

SAVOIR

A Rappels utiles

1 Epreuve de Bernoulli :

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui ne comporte que **deux issues** :

- « **succès** » avec une probabilité p .
- « **échec** » avec une probabilité $(1 - p)$.

2 Schéma de Bernoulli :

Un schéma de Bernoulli est une succession d'épreuves de **Bernoulli, identiques et indépendantes** les unes des autres.

Notons que les tirages se font avec remise.

3 La loi binomiale :

La loi binomiale découle d'un schéma de Bernoulli. Dans ces conditions, la probabilité d'obtenir « κ » **succès** sur « n » **épreuves** indépendantes (ou avec remise) est :

$$P(X = \kappa) = \binom{n}{\kappa} p^{\kappa} (1 - p)^{n - \kappa}.$$

Notons que : ▪ $\binom{n}{\kappa} = \frac{n!}{\kappa!(n - \kappa)!}$,

- les n épreuves sont **indépendantes**, elles comportent chacune **deux issues** (succès, échec) et sont **identiques**.

4 ⊕ sur la loi binomiale :

a). Notation :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres :

$$n = 30 \text{ et } p = 0,4.$$

On note : $X \rightsquigarrow B(n ; p)$, cad $X \rightsquigarrow B(30 ; 0, 4)$.

ⓑ. **Espérance et variance :**

Soit $X \rightsquigarrow B(n ; p)$: $E(X) = n \cdot p$ et $V(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$.

B Variable aléatoire continue

1 Définition :

Une variable aléatoire continue X est une fonction qui, à chaque issue d'une expérience, associe un nombre réel d'un intervalle I de \mathbb{R} , ou \mathbb{R} tout entier.

2 Remarque 1 :

▪ En continue, \leq et $<$ ou \geq et $>$: c'est la même chose !!

▪ Ainsi, l'événement la " variable aléatoire X est comprise entre **a et b** ($a, b \in \mathbb{R}$)" s'écrit :

$$\begin{aligned} & a \leq X \leq b \\ & \text{ou } a < X < b \\ & \text{ou } a \leq X < b \\ & \text{ou } a < X \leq b. \end{aligned}$$

▪ De plus :

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= P(a < X < b) \\ &= P(a \leq X < b) \\ &= P(a < X \leq b). \end{aligned}$$

3 Remarque 2 :

▪ En continu : $P(X = \kappa) = 0$, **always** !

C Densité de probabilité

1 Définition :

Une densité de probabilité sur $[a, b]$ est une fonction f définie, **continue, positive** sur

$[a, b]$, et telle que : $\int_a^b f(x) dx = 1$.

2 Traduction :

f est une densité de probabilité sur $[a, b]$ ssi :

Ⓐ. f est continue par morceaux (ce sera toujours le cas, juste le dire) ;

Ⓑ. $\int_a^b f(x)dx = 1$;

Ⓒ. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$.

3 Exemple :

Soit la fonction f définie sur $[0, 1]$ par : $f(x) = 3x^2$.

Montrons que f est une densité de probabilité :

$$f(x) = 3x^2, \forall x \in [0, 1] \text{ peut s'écrire : } f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Ⓐ. Ici, f est **continue par morceaux**.

$$\begin{aligned} \text{Ⓑ. } \int_0^1 f(x)dx &= \int_0^1 3x^2 dx \\ &= [x^3]_0^1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Nous avons donc bien : $\int_0^1 f(x)dx = 1$.

Ⓒ. ■ si $x \in [0, 1]$, $f(x) = 3x^2 \geq 0$,

■ si $x \notin [0, 1]$, $f(x) = 0 \geq 0$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$.

Au total, f est **bien une densité de probabilité sur $[0, 1]$** .

D Fonction de répartition

1 Définition :

Soit X une variable aléatoire continue. On appelle fonction de répartition de X , la fonction F , à valeurs dans $[0, 1]$, définie par :

$$\begin{aligned}
 \forall x \in \mathbb{R}, F(x) &= P(X \leq x) \\
 &= P(X < x) \\
 &= \int_{-\infty}^x f(t) dt \\
 &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^x f(t) dt.
 \end{aligned}$$

2 A quoi ça sert ?

Une fois que l'on a déterminé F , on est capable de calculer toutes les probabilités suivantes :

- $P(c \leq X \leq d) = F(d) - F(c)$
- $P(c < X < d) = F(d) - F(c)$
- $P(c \leq X < d) = F(d) - F(c)$
- $P(c < X \leq d) = F(d) - F(c)$
- $P(X \leq d) = F(d)$
- $P(X < d) = F(d)$
- $P(X \geq d) = 1 - P(X \leq d) = 1 - P(X < d)$
- $P(X > d) = 1 - P(X \leq d) = 1 - P(X < d)$.

3 Exemple :

Soit X une variable aléatoire dont la densité est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{32} x(4-x) & \text{si } x \in [0, 4] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Calculons $P(1 \leq X < 3)$:

Ⓐ. Rédaction 1 :

Soit F , la fonction de répartition de X .

Nous savons que : $F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

Distinguons 3 cas :

- si $x \leq 0$, $F(x) = 0$.
- si $x \in [0, 4]$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

$$= \frac{3}{32} \int_0^x (4t - t^2) dt$$

$$= \frac{3}{32} \left[2t^2 - \frac{t^3}{3} \right]_0^x$$

$$= \frac{3x^2}{16} - \frac{x^3}{32}.$$

- si $x \geq 4$, $F(x) = 1$.

Au total :
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{3x^2}{16} - \frac{x^3}{32} & \text{si } x \in [0, 4] \\ 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}.$$

Dans ces conditions :

$$P(1 \leq X < 3) = F(3) - F(1) = \left(\frac{3(3)^2}{16} - \frac{(3)^3}{32} \right) - \left(\frac{3}{16} - \frac{1}{32} \right).$$

En résumé :
$$P(1 \leq X < 3) = \frac{11}{16}.$$

(b). Rédaction 2 :

Nous savons que : $P(1 \leq X < 3) = \int_1^3 f(x)dx$.

$$P(1 \leq X < 3) = \int_1^3 \frac{3}{32} x(4-x)dx$$

$$= \left[\frac{3}{32} \left(2x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \right]_1^3 \Rightarrow \boxed{P(1 \leq X < 3) = \frac{11}{16}}.$$

E Espérance mathématique

1 Définition et formule :

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X dont la densité de probabilité f est définie sur un intervalle fermé $[a, b]$ est :

$$\boxed{E(X) = \int_a^b x f(x)dx}.$$

2 Autres formules de l'espérance :

$$\boxed{E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx} \text{ (a)}$$

ou $\boxed{E(X) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b x f(x)dx}$ (b)

ou $\boxed{E(X) = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b x f(x)dx}$ (c).

3 Propriétés de l'espérance mathématique :

Soient X et Y deux variables aléatoires et $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:

• $E(aX + b) = aE(X) + b$,

• $E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$.

F

 Loi uniforme sur $[a, b]$

1 Définition :

Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$ ($a < b$) lorsque sa densité de probabilité f est la fonction constante sur $[a, b]$, de valeur : $\frac{1}{b-a}$.

On note : $X \rightsquigarrow \mathcal{U}_{[a, b]}$.

2 Traduction :

$$X \rightsquigarrow \mathcal{U}_{[a, b]} \text{ssi} : f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

3 L'espérance mathématique d'une loi uniforme sur $[a, b]$:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \Rightarrow E(X) = \int_a^b x f(x) dx^*.$$

$$\begin{aligned} \text{D'où} : E(X) &= \int_a^b \frac{x}{b-a} dx \Leftrightarrow E(X) = \left[\frac{x^2}{2(b-a)} \right]_a^b \\ &\Leftrightarrow E(X) = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} \Leftrightarrow E(X) = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} \\ &\Rightarrow \boxed{E(X) = \frac{b+a}{2}} \text{ ou } \boxed{E(X) = \frac{a+b}{2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * : \text{Car d'après Chasles} : \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx &= \int_{-\infty}^a x f(x) dx + \int_a^b x f(x) dx + \int_b^{+\infty} x f(x) dx \\ &= \int_b^a x f(x) dx, \end{aligned}$$

$$\text{du fait que} : \int_{-\infty}^a x f(x) dx = 0 \text{ et } \int_b^{+\infty} x f(x) dx = 0.$$

4 La variance :

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

5 Calcul de la probabilité $P(\heartsuit < X \leq \square)$:

$$\begin{aligned} P(\heartsuit < X \leq \square) &= \int_{\heartsuit}^{\square} f(x) dx \\ &= \int_{\heartsuit}^{\square} \frac{1}{b-a} dx \\ &= \left[\frac{x}{b-a} \right]_{\heartsuit}^{\square} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(\heartsuit < X \leq \square) = \frac{\square - \heartsuit}{b-a}.$$

G Loi exponentielle sur $[0, +\infty[$ **1 Définition :**

Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda (\lambda > 0)$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$ lorsque sa densité de probabilité f est :

$$\forall x \in [0, +\infty[, f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \text{ et on note : } X \sim \varepsilon(\lambda).$$

2 Traduction :

$$X \rightsquigarrow \varepsilon(\lambda) \text{ ssi : } f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3 L'espérance mathématique d'une $\varepsilon(\lambda)$:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow E(x) = \int_0^{+\infty} x f(x) dx \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow E(x) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x f(x) dx \quad (3)$$

$$(3) \Rightarrow \boxed{E(X) = 1/\lambda}.$$

4 La variance :

$$\boxed{V(X) = 1/\lambda^2}.$$

5 Calcul de la probabilité $P(\heartsuit \leq X < \square)$:

$$\begin{aligned} P(\heartsuit \leq X < \square) &= \int_{\heartsuit}^{\square} f(x) dx \\ &= \int_{\heartsuit}^{\square} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= [-e^{-\lambda x}]_{\heartsuit}^{\square} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(\heartsuit \leq X < \square) = e^{-\lambda \heartsuit} - e^{-\lambda \square}}.$$

6 Autres probabilités :

$$\blacksquare \quad \boxed{P(X \leq c) = 1 - e^{-\lambda c}}$$

$$\blacksquare \quad \boxed{P(X \leq c) = e^{-\lambda c}}.$$

H Loi normale centrée réduite

1 Définition :

Une variable aléatoire X suit une loi normale centrée réduite si sa densité de probabilité s'écrit :

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \forall x \in \mathbb{R}}.$$

2 Notations :

On écrit : $X \rightsquigarrow N(0;1)$.

3 L'espérance mathématique d'une $N(0,1)$:

$$E(X) = 0 \text{ ou } \mu = m = 0.$$

4 La variance d'une $N(0,1)$:

$$V(X) = 1 \text{ ou } \sigma^2 = 1.$$

5 Propriétés :

- $P(-1,96 \leq X \leq 1,96) = 0,95$.
- $P(X \leq 0) = P(X < 0) = P(X \geq 0) = P(X > 0) = \frac{1}{2}$.
- $P(X < U) = P(X \leq U)$.
- $P(X > U) = P(X \geq U) = 1 - P(X \leq U) = 1 - P(X < U)$.
- $P(X < -U) = P(X \leq -U) = 1 - P(X \leq U) = 1 - P(X < U)$.
- $P(X > -U) = P(X \geq -U) = P(X < U) = P(X \leq U)$.
- $P(-U \leq X \leq U) = P(-U \leq X < U)$
 $= P(-U < X \leq U)$
 $= P(-U < X < U)$
 $= 2P(X < U) - 1$
 $= 2P(X \leq U) - 1$.

I Loi normale $N(\mu ; \sigma^2)$ **1 Définition :**

Une variable aléatoire X suit une loi normale de paramètres m (ou μ) et σ^2 si sa densité s'écrit :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2 Notations :

On écrit : $X \rightsquigarrow N(m; \sigma^2)$ ou $X \rightsquigarrow N(\mu; \sigma^2)$.

3 L'espérance mathématique d'une $N(\mu; \sigma^2)$:

$$E(X) = \mu = m.$$

4 La variance d'une $N(\mu; \sigma^2)$:

$$V(X) = \sigma^2.$$

5 Autre notation :

$$X \rightsquigarrow N(E(X) ; V(X)).$$

6 Propriétés à connaître :

Si $X \rightsquigarrow N(\mu; \sigma^2)$, alors :

Ⓐ. $\frac{X - \mu}{\sigma} \rightsquigarrow N(0, 1)$.

On dit : " on centre et on réduit la variable aléatoire X ".

Ⓑ. ■ $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,683$.

■ $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,954$.

- $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$.

7 Théorème de Moivre-Laplace :

(a). Son but :

Ce théorème permet d'**approximer** une loi **binomiale** par une loi **normale**.

(b). Enoncé :

- Soient X un variable aléatoire qui suit une loi $B(n, p)$, et Z la variable aléatoire :

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)} = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}.$$

(car quand $X \sim B(n, p)$: $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$).

- Pour tous nombres a et b tels que $a \leq b$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(a \leq Z \leq b) = \int_a^b \varphi(t) dt, \varphi \text{ étant la densité de probabilité d'une } N(0,1).$$

(c). Conditions d'application de ce théorème : $n \geq 30$, $np \geq 5$, $np(1-p) \geq 5$.

Ainsi, on pourra approximer une loi binomiale par une loi normale uniquement lorsque ces trois conditions sont vérifiées.

En résumé :

<ul style="list-style-type: none"> ▪ si $X \sim B(n, p)$ ▪ si $n \geq 30$ ▪ si $np \geq 5$ ▪ si $np(1-p) \geq 5$ 	}	<p>ALORS, on peut approximer X par une loi normale :</p> <p style="text-align: center;">$N(np; np(1-p)).$</p>
--	---	---