Bac Mathématiques

Série S - 2017

Suites

UNIQUEMENT
LE COURS POUR AVOIR
20/20

alainpiller.fr

2

ALAIN
PILLER

SUITES

Rien de plus facile !

BAC MATHS

TERM.
S

SAVOIR

TRAINING

INTÉRROS LYCÉES

EXOS ANNALES BAC

PREMIUM ÉDITEUR

SAVOIR

A Suite numérique

Une suite numérique est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

→ **Notations** : ▪ L'image de $n \in \mathbb{N}$, notée u_n, s'appelle le terme général de la suite.

▪ La suite s'écrit : $(\boldsymbol{u_n})$ ou $\{\boldsymbol{u_n}\}$.

→ **Exemple** : Soit $\{u_n\}$, la suite dont le terme général est : $u_n = \dfrac{3n^2}{3n^3 + 7n^2}$.

B Suite arithmétique

Dire qu'une suite $\{u_n\}$ est **arithmétique** signifie qu'il existe un nombre r (**raison**) tel que :

$$\boxed{\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_{n+1} = u_n + r}}.$$

→ **Propriétés** : ▪ $\forall n, p \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_n = u_p + (n - p) \cdot r}$.

$$\to u_n = u_0 + (n) \cdot r$$

$$\to u_n = u_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$\to u_n = u_2 + (n - 2) \cdot r \quad \text{etc...}$$

▪ $$\sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{k=n}} \boldsymbol{k} = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{\boldsymbol{n(n+1)}}{\boldsymbol{2}}.$$

▪ **Somme de termes consécutifs** :

$$u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = \frac{\boldsymbol{(n - p + 1) \times (u_p + u_n)}}{\boldsymbol{2}}.$$

▪	$r > 0$	$\{u_n\}$ est croissante
	$r < 0$	$\{u_n\}$ est décroissante
	$r = 0$	$\{u_n\}$ est constante ou stationnaire

.

C Suite géométrique

Dire qu'une suite $\{u_n\}$ est **géométrique** signifie qu'il existe un nombre q (**raison**) non nul tel que :

$$\boxed{\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_{n+1} = q \times u_n}}\ .$$

→ **Propriétés** : ▪ $\forall n, p \in \mathbb{N}, u_n = \boldsymbol{q^{(n-p)} \times u_p}$.

$\rightarrow u_n = q^n \times u_0$

$\rightarrow u_n = q^{(n-1)} \times u_1$

$\rightarrow u_n = q^{(n-2)} \times u_2$ etc...

▪ $$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + ... + q^n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{(n+1)}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}\ .$$

▪ **Somme de termes consécutifs** :

$$u_p + u_{p+1} + ... + u_n = \boldsymbol{u_p \times \left(\frac{1-q^{(n-p+1)}}{1-q}\right)}\ .$$

▪ **Si le premier terme est strictement positif** :

$q > 1$	$\{u_n\}$ est croissante
$q \in]0, 1[$	$\{u_n\}$ est décroissante
$q = 1$	$\{u_n\}$ est constante ou stationnaire

.

- **Si le premier terme est strictement négatif :**

$q > 1$	$\{u_n\}$ est décroissante
$q \in]0, 1[$	$\{u_n\}$ est croissante
$q = 1$	$\{u_n\}$ est constante ou stationnaire

.

D Notion de suite convergente, divergente ou nature d'une suite

→ $\{u_n\}$ est **convergente** et converge vers L(***fini***) ssi : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$.

Notons qu'ici, il y a unicité de *L*.

→ $\{u_n\}$ est **divergente** ssi : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

E Théorème de l'encadrement ou théorème des gendarmes

Si, à partir d'un certain rang, on a : $\boldsymbol{v_n \leq u_n \leq w_n}$, et si les suites $\{v_n\}$ et $\{w_n\}$ convergent vers L, alors la suite $\{u_n\}$ converge vers L.

F Astuces pour le calcul de limites

F1 La limite en $+\infty$ d'une suite exprimée sous forme d'**un polynôme** est égale à la limite en $+\infty$ de son terme de plus haut degré.

$$\to \lim_{n \to +\infty} 7n^2 + 3n = \lim_{n \to +\infty} 7n^2$$
$$= +\infty.$$

F2 La limite en $+\infty$ d'une suite exprimée sous forme d'**un rapport de 2 polynômes** est égale à la limite en $+\infty$ des termes de plus haut degré.

$$\rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{7n^2}{3n^3 + 33} = \lim_{n \to +\infty} \frac{7n^2}{3n^3}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{7}{3n}$$

$$= 0.$$

F3 Le théorème des croissances comparées (TCC)

En $+\infty$, cad quand $n \to +\infty$, e^n croît plus vite que n^k qui croît plus vite que $\ln(n)$.

$$\rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{7n^2 + 10}{e^n} = 0$$, d'après TCC.

$$\rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{49 \cdot \ln(n)}{n} = 0$$, d'après TCC.

F4 La technique de la quantité conjuguée

$$\rightarrow \lim_{n \to +\infty} 3n - \sqrt{7n^2 + 3} = +\infty - (+\infty).$$

Appliquons la technique de la quantité conjuguée :

$$3n - \sqrt{7n^2 + 3} = \frac{(3n - \sqrt{7n^2 + 3})(3n + \sqrt{7n^2 + 3})}{(3n + \sqrt{7n^2 + 3})}$$

$$= \frac{(3n)^2 - (\sqrt{7n^2 + 3})^2}{(3n + \sqrt{7n^2 + 3})}$$

$$= \frac{-4n^2 - 3}{(3n + \sqrt{7n^2 + 3})},$$

car : $[\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}][\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}] = \boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2$

Dans ces conditions :

$$\lim_{n \to +\infty} 3n - \sqrt{7n^2 + 3} = \lim_{n \to +\infty} \frac{-4n^2 - 3}{(3n + \sqrt{7n^2 + 3})}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{-4n^2}{(3 + \sqrt{7})n}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{-4n}{(3n + \sqrt{7})}$$

$$= -\infty \, .$$

F5 Les formes indéterminées (FI) souvent rencontrées

- $+\infty - (+\infty)$
- $+\infty \times 0, -\infty \times 0$
- $\frac{0}{0}$

F6 Comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites. Si pour tout entier naturel $n \geq n_0$:

- $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$,
- $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

G Sens de variation d'une suite

G1

- $\{u_n\}$ est dite croissante ssi : $\boxed{\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_n} \leq \boldsymbol{u_{n+1}}}$.
- $\{u_n\}$ est dite décroissante ssi : $\boxed{\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_n} \geq \boldsymbol{u_{n+1}}}$.
- $\{u_n\}$ est strictement croissante ssi : $\boxed{\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_n} < \boldsymbol{u_{n+1}}}$.

- $\{u_n\}$ est strictement décroissante ssi : $\boxed{\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_n} > \boldsymbol{u_{n+1}}}$.

G2 Astuces

- Soit on détermine le signe de $u_{n+1} - u_n$.
- Soit on compare $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1.
- Soit on pose $u_n = f(n)$, avec $Df \subset [0, +\infty[$, et on étudie f sur Df .

H Majorée, minorée

- $\{u_n\}$ est majorée ssi $\exists \mathbb{M} \in \mathbb{R}, \forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\boldsymbol{u_n} < \mathbb{M}},\ \mathbb{M} \text{ étant le majorant.}$$

- $\{u_n\}$ est minorée ssi $\exists m \in \mathbb{R}, \forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\boldsymbol{u_n} > \boldsymbol{m}},\ \boldsymbol{m} \text{ étant le minorant.}$$

I Théorème des suites monotones

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.