

**Bac Mathématiques**

**Série S - 2017**

**Probabilités**

**UNIQUEMENT  
LE COURS POUR AVOIR  
20/20**

***alainpiller.fr***

5

ALAIN  
**PILLER**

**PROBAS DISCRÈTES**

*Rien de plus facile !*

**BAC MATHS**



**SAVOIR**

**TRAINING**

**INTÉRROS LYCÉES**

**EXOS ANNALES BAC**

TERM.

**S**

PREMIUM ÉDITEUR

# SAVOIR

## A Quelques définitions :

### 1 Définissons ce qu'est une expérience aléatoire :

Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat de façon certaine.

### 2 Déterminons ce qu'est l'univers ou ensemble des possibilités ou ensemble fondamental :

L'univers ou ensemble des possibilités ou ensemble fondamental est l'ensemble de tous les résultats ou de toutes les réalisations possibles d'une expérience aléatoire.

L'univers se note  $\Omega$ .

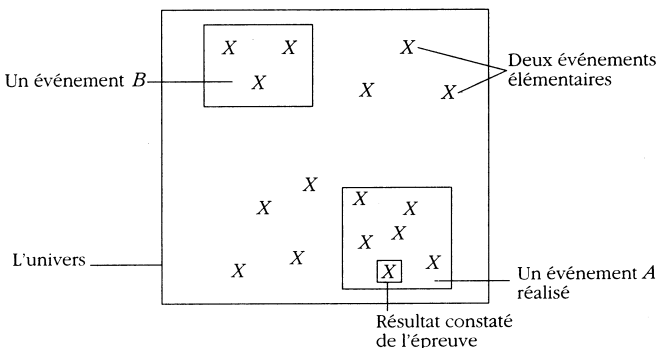
### 3 Donnons la définition d'un événement élémentaire et celle d'un événement aléatoire :

Un événement élémentaire est une réalisation possible de  $\Omega$ .

Par ailleurs, toute partie  $A$  de  $\Omega$  constituée d'événements élémentaires est appelé un événement aléatoire ou événement.

### 4 Essayons de résumer ces différentes notions à l'aide d'un graphique :

Ces différentes notions peuvent être résumées à l'aide du graphique suivant :



### 5 Donnons la signification de $\bar{A}$ :

$\bar{A}$  est le complémentaire de  $A$  dans  $\Omega$ .

Ainsi, si l'événement  $A$  est réalisé, alors l'événement  $\bar{A}$  n'est pas réalisé.

### 6 Donnons la signification de $A \cup B$ :

Soit l'événement  $X = A \cup B$  ( $A$  union  $B$ ).

La réalisation de l'événement  $X$  entraîne la réalisation de l'événement  $A$  ou de l'événement  $B$ , ou des deux événements  $A$  et  $B$  simultanément.

### 7 Donnons la signification de $A \cap B$ :

L'intersection des deux événements  $A$  et  $B$  se note  $A \cap B$ .

Soit l'événement  $Y = A \cap B$  ( $A$  inter  $B$ ).

La réalisation de l'événement  $Y$  entraîne la réalisation de l'événement  $A$  et de l'événement  $B$ .

### 8 Donnons la signification de $A \subset B$ :

La relation  $A \subset B$  ( $A$  inclus dans  $B$ ) exprime le fait que la réalisation de l'événement  $A$  implique celle de  $B$ .

### 9 a. Donnons la signification de $A \cap B = \emptyset$ :

La relation  $A \cap B = \emptyset$  exprime le fait que les événements  $A$  et  $B$  sont **incompatibles** cad qu'ils ne peuvent pas être réalisés simultanément.

Il est bon de noter que  $\emptyset$  (l'ensemble vide) est appelé l'événement impossible car il n'est jamais réalisé.

À l'inverse,  $\Omega$  est appelé l'événement certain car il est toujours réalisé.

## **B** Quelques propriétés des événements :

### ▪ La commutativité :

$$A \cup B = B \cup A ;$$

$$A \cap B = B \cap A.$$

▪ **L'associativité :**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C = A \cup B \cap C ;$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C = A \cap B \cup C.$$

▪ **La distributivité :**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) ;$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

▪ **Autres propriétés :**

$$\overline{\overline{A \cup B}} = \overline{A} \cap \overline{B} ;$$

$$\overline{\overline{A \cap B}} = \overline{A} \cup \overline{B} ;$$

$$\overline{\overline{A}} = A ;$$

$$\overline{A \cap \emptyset} = \emptyset ;$$

$$\overline{A \cup \emptyset} = A ;$$

$$\overline{A \cap \Omega} = A ;$$

$$\overline{A \cup \Omega} = \Omega ;$$

$$\overline{A \cap \overline{A}} = \emptyset ;$$

$$\overline{A \cup \overline{A}} = \Omega.$$

▪ **Incompatibilité de 2 événements :**

A et B sont **incompatibles** ssi :  $A \cap B = \emptyset$ .

**C** **Quelques propriétés des probabilités :**

▪ La probabilité d'un événement est toujours positive ou nulle :  $\forall A, P(A) \geq 0$ .

▪  $P(\Omega) = 1$ .

▪  $P(\emptyset) = 0$ .

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ .
- Si l'événement  $A$  est constitué de 3 événements élémentaires  $a, b$  et  $c$ , dont les probabilités respectives sont  $P(a), P(b)$  et  $P(c)$ , alors :  $P(A) = P(a) + P(b) + P(c)$ .
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

## **D** Indépendance de 2 événements :

### **1** Définition :

Deux événements  $A$  et  $B$  sont indépendants ssi :  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ .

### **2** Remarque :

Ne pas confondre indépendance et incompatibilité de 2 événements  $A$  et  $B$ .

- $A$  et  $B$  indépendants ssi :  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ .
- $A$  et  $B$  incompatible ssi :  $P(A \cap B) = 0$  car  $A \cap B = \emptyset$ .

### **3** Démonstration à connaître :

Soient  $A$  et  $B$ , 2 événements.

$A$  et  $B$  indépendants  $\Leftrightarrow \bar{A}$  et  $B$  indépendants.

**Supposons** :  $A$  et  $B$  indépendants.

Dans ces conditions :  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ .

Or :  $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$  (1).

(1)  $\Leftrightarrow P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$  (2).

Comme  $A$  et  $B$  indépendants : (2)  $\Leftrightarrow P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B)$  (3).

(3)  $\Leftrightarrow P(\bar{A} \cap B) = P(B)(1 - P(A)) \Rightarrow P(\bar{A} \cap B) = P(B) \times P(\bar{A})$ .

Donc on a bien :  $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P(B)$ , ce qui nous permet d'affirmer que  $\bar{A}$  et  $B$  sont bien indépendants.

**E** Probabilités conditionnelles :**1** Définition :

Soient  $A$  et  $B$ , deux événements, avec  $P(B) > 0$ .

On appelle probabilité conditionnelle de  $A$  sachant  $B$ , le nombre réel :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

**2** Autre notation :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

**3** Remarque :

Si  $A$  et  $B$  sont indépendants alors :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P_B(A) = \frac{P(A) \times P(B)}{P(B)} \Rightarrow P_B(A) = P(A).$$

**F** Loi de probabilités :**1** Exemples : Voir exercices Training 4.**2** Espérance mathématique :**(a).** Formule :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i).$$

**(b).** Propriétés :

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires et  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ .

- $E(aX + b) = aE(X) + b$ .
- $E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$ .

**3 Variance :****ⓐ. Formule :**

$$V(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot P(X = x_i) - [E(X)]^2.$$

**ⓑ. Propriété :**

Soit  $X$  une variable aléatoire et  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

**G Bernoulli et loi binomiale :****1 Epreuve de Bernoulli :**

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui ne comporte que **deux issues** :

- « **succès** » avec une probabilité  $p$ .
- « **échec** » avec une probabilité  $(1 - p)$ .

**2 Schéma de Bernoulli :**

Un schéma de Bernoulli est une succession d'épreuves de **Bernoulli, identiques et indépendantes** les unes des autres.

Notons que les tirages se font avec remise.

**3 La loi binomiale :**

La loi binomiale découle d'un schéma de Bernoulli. Dans ces conditions, la probabilité d'obtenir «  $\kappa$  » **succès** sur «  $n$  » **épreuves** indépendantes (ou avec remise) est :

$$P(X = \kappa) = \binom{n}{\kappa} p^{\kappa} (1 - p)^{n - \kappa}.$$



Notons que :  $\binom{n}{\kappa} = \frac{n!}{\kappa!(n-\kappa)!}$ ,

- les  $n$  épreuves sont **indépendantes**, elles comportent chacune **deux issues** (succès, échec) et sont **identiques**.

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ .

- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ .

#### 4 ⊕ sur la loi binomiale :

##### ⓐ. Notation :

Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres :

$$n = 30 \text{ et } p = 0,4.$$

On note :  $X \rightsquigarrow B(n ; p)$ , cad  $X \rightsquigarrow B(30 ; 0,4)$ .

##### ⓑ. Espérance et variance :

Soit  $X \rightsquigarrow B(n ; p)$  :  $E(X) = n \cdot p$  et  $V(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$ .