

Bac Mathématiques

Série S - 2017

Nombres complexes

**UNIQUEMENT
LE COURS POUR AVOIR
20/20**

alainpiller.fr

3

ALAIN
PILLER

NOMBRES COMPLEXES

Rien de plus facile !

BAC MATHS



SAVOIR

TRAINING

INTÉRROS LYCÉES

EXOS ANNALES BAC

TERM.

S

PREMIUM ÉDITEUR

SAVOIR

I A Définition de l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes :

L'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes est un corps.

Nous avons : $\mathbb{C} = \{z = a + ib / a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$.

Exemples : $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -1 + i$, $z_3 = -6i$.

B Vocabulaire :

1 $z = a + ib$ correspond à la **forme algébrique** de z .

2 $a = Re(z)$ est la **partie réelle** de z .

3 $b = Im(z)$ est la **partie imaginaire** de z .

4 z est **réel** $\Leftrightarrow Im(z) = 0 \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow z = a$.

5 z est **imaginaire pur** $\Leftrightarrow Re(z) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow z = ib, b \neq 0$.

C Propriétés de la forme algébrique :

a. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes, avec $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$.

Dans ces conditions, $z_1 = z_2$ si et seulement si $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$.

b. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes, avec $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$.

Dans ces conditions, $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$.

c. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes, avec $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$.

Dans ces conditions, $z_1 \times z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$ car $i^2 = -1$.

Ⓓ. Soit $z = i$, un nombre complexe, nous avons :

$$z_2 = i^2 = -1, z_3 = -i \text{ et } z_4 = 1.$$

Ⓔ. Soit $z = a + ib$, nous avons : $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$.

II A Définition de la notion de nombre complexe conjugué :

Si $z = a + ib$, z étant un nombre complexe, on appelle **conjugué** de z le nombre complexe : $\bar{z} = a - ib$.

Exemples : ■ si $z_1 = 2 + 3i$, $\bar{z}_1 = 2 - 3i$;

■ si $z_2 = 2 + 4i$, $\bar{z}_2 = 2 - 4i$;

■ si $z_3 = 3$, $\bar{z}_3 = 3$.

B Propriétés des nombres complexes conjugués :

Ⓐ. Soit z un nombre complexe, $\bar{\bar{z}} = z$.

Ⓑ. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes, avec $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$.

Dans ces conditions : $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ si et seulement si $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$.

Ⓒ. Soit z un nombre complexe, $z + \bar{z} = 2a$ (avec $z = a + ib$).

Ⓓ. Soit z un nombre complexe, $z - \bar{z} = 2ib$ (avec $z = a + ib$).

Ⓔ. Soit z un nombre complexe, $z\bar{z} = a^2 + b^2$ (avec $z = a + ib$).

Ⓕ. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes, $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.

Ⓖ. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.

Ⓗ. Soient z un nombre complexe imaginaire pur c'est-à-dire $z = ib$, alors : $z + \bar{z} = 0$.

ⓑ. Soit $z \in \mathbb{R}$, cad $z = a$, alors : $z = \bar{z} \Leftrightarrow z - \bar{z} = 0$.

Ⓙ. Soit z un nombre complexe : $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$ et $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$.

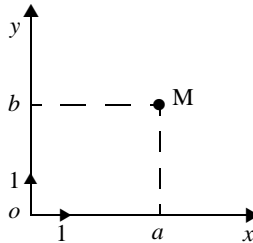
Ⓚ. Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes : $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

Ⓛ. Soit z un nombre complexe : $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$.

III A Représentation géométrique d'un nombre complexe :

Dans le plan \mathbb{R}^2 , si M est le point de coordonnées a et b respectivement sur $(1, 0)$ et $(0, 1)$ alors :

- le point $M(a, b)$ est l'image du nombre complexe $z = a + ib$;
- le nombre complexe $z = a + ib$ est appelé l'affixe du point M ;
- graphiquement, nous avons :



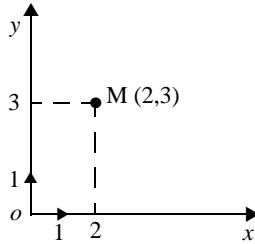
On note : $M(z)$.

B Exemple :

Soit $z = 2 + 3i$, faisons une représentation géométrique de ce nombre complexe :

Pour cela, il suffit de placer le point M , c'est-à-dire l'image du nombre complexe $z = 2 + 3i$ sachant que M a pour coordonnées 2 et 3 sur $(1,0)$ et $(0,1)$: $M(2, 3)$.

Représentation géométrique :

**C** Théorème :

Si z_A et z_B , sont les affixes des points A et B dans un repère orthonormé, alors l'affixe du vecteur \overrightarrow{AB} est : $z_B - z_A$.

On note : $\overrightarrow{AB}(z_B - z_A)$.

D Propriétés :

1 Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs ayant pour affixes respectifs z et z' : $\vec{u}(z)$ et $\vec{v}(z')$.

Dans ces conditions :

a. $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow z = z'$.

b. $\vec{u} + \vec{v}$ a pour affixe $z + z'$: $\vec{u} + \vec{v}(z + z')$.

2 Si I est le milieu du segment $[AB]$, alors : $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$.

IV A Ecriture d'un nombre complexe sous forme trigonométrique :

Soient $z = a + ib$ un nombre complexe écrit sous forme algébrique, ρ son module et θ son argument.

Sous forme trigonométrique z s'écrit :

$$\boxed{\begin{array}{l} z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) \\ \text{ou : } z = \rho e^{i\theta} \\ \text{ou : } z = [\rho, \theta] \end{array}}$$

B Module "ρ" ou "r" :

On appelle **module** de z , et on note $|z|$, le réel positif ou nul : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, avec $z = a + ib$.

On note : $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ ou $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Exemples : ▪ Si $z_1 = 1 + i$, $|z_1| = \sqrt{2}$;

▪ Si $z_2 = 1 - i$, $|z_2| = \sqrt{2}$;

▪ Si $z_3 = 1 - \sqrt{3} \cdot i$, $|z_3| = 2$.

C Argument "θ" :

1 Définition:

On appelle argument de z , et on note $\text{Arg}(z)$ ou θ , l'angle des demi-droites orientées (\vec{Ox}, \vec{OM}) , exprimé en radians et défini à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$).

On note : $\theta = \arg(z)[2\pi]$.

2 Propriétés :

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes écrits sous forme trigonométrique :

$$z_1 = [\rho_1, \theta_1] \text{ et } z_2 = [\rho_2, \theta_2].$$

Ⓐ. $z_1 = z_2$ si et seulement si $\rho_1 = \rho_2$ et $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ⓑ. $z_1 \times z_2 = [\rho_1 \times \rho_2, \theta_1 + \theta_2]$.

Ⓒ. $\frac{z_1}{z_2} = \left[\frac{\rho_1}{\rho_2}, \theta_1 - \theta_2 \right]$.

$$\text{d. } \frac{1}{z_1} = \left[\frac{1}{\rho_1}, -\theta_1 \right].$$

$$\text{e. } z_1^n = [\rho_1^n, n\theta_1].$$

Il est bon de remarquer que cette dernière propriété porte le nom de la *formule de Moivre* que nous pouvons aussi écrire de la manière suivante :

$$z_1^n = [\rho_1^n, n\theta_1] \Leftrightarrow z_1^n = \rho_1^n (\cos n\theta_1 + i \sin n\theta_1) \Leftrightarrow z_1^n = \rho_1^n e^{in\theta_1}.$$

ou

$$\text{a. } z_1 = z_2 \text{ ssi } r_1 = r_2 \text{ et } \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi.$$

$$\begin{aligned} \text{b. } z_1 \times z_2 &= (r_1 \times r_2) e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \\ &= (r_1 \times r_2) (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } \frac{z_1}{z_2} &= \left(\frac{r_1}{r_2} \right) e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \\ &= \left(\frac{r_1}{r_2} \right) (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d. } \frac{1}{z_1} &= \left(\frac{1}{r_1} \right) e^{-i\theta_1} \\ &= \left(\frac{1}{r_1} \right) (\cos(-\theta_1) + i \sin(-\theta_1)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e. } z_1^n &= (r_1^n) e^{in\theta_1} \\ &= (r_1^n) (\cos(n\theta_1) + i \sin(n\theta_1)). \end{aligned}$$

$$\text{f. } \forall \theta \in \mathbb{R} : \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

D Formules trigonométriques :

← **VOIR RABAT**

E Astuces :**1** Si on connaît r et θ :Dans ces conditions : $a = r \cos(\theta)$ et $b = r \sin(\theta)$.**2** Si on connaît a et b :Dans ces conditions, θ est tel que :

$$\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$\text{Ou : } \cos(\theta) = \frac{a}{r} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{b}{r}.$$

V Résolution dans \mathbb{C} d'équations du second et troisième degrés :**Voir Training 4, page 39****VI Propriétés géométriques :**Soient quatre points $A(z_A), B(z_B), C(z_C), D(z_D)$.Nous savons déjà que : $\overrightarrow{AB}(z_B - z_A)$.**A Démontrer le parallélisme :**

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{CD}},$$

$$(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = 0[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad A, B \text{ et } C \text{ alignés} &\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0[\pi] \\
 &\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

B Démontrer l'orthogonalité :

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad (AB) \perp (CD) \\
 \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi] \\
 \Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \text{ est un imaginaire pur,}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \overline{ABC} \text{ triangle rectangle en } A \\
 \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi] \\
 \Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \text{ est un imaginaire pur.}
 \end{aligned}$$

C Démontrer l'égalité de longueurs :

$$AB = CD \Leftrightarrow |z_B - z_A| = |z_D - z_C|$$

D Déterminer l'angle de 2 vecteurs :

$$\overrightarrow{(AB, CD)} = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$$

E Démontrer un triangle équilatéral direct :

$$ABC \text{ est un triangle équilatéral direct ssi : } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\pi/3}$$