

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2015

MATHÉMATIQUES

Série ES/L

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 5 (ES), 4(L)

ES : ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE
L : ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

**Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées
conformément à la réglementation en vigueur**

- *Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.*
- *Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.*
- *Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*
- *Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.*

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte **6 pages numérotées de 1 / 6 à 6 / 6**

EXERCICE 1 (4 points) Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante.

1. Soit la fonction g définie pour tout nombre réel x par $g(x) = 2e^{3x} + \frac{1}{2} \ln(x)$.

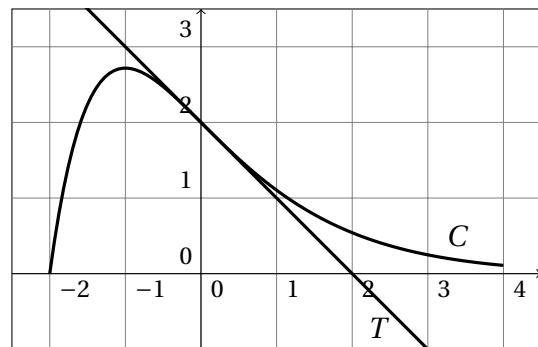
Si g' désigne la fonction dérivée de g , on a :

- a. $g'(x) = 2e^{3x} + \frac{2}{x}$ b. $g'(x) = 6e^{3x} + \frac{2}{x}$ c. $g'(x) = 6e^{3x} + \frac{1}{2x}$ d. $g'(x) = 6e^x + \frac{1}{2x}$

2. La courbe représentative C d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-2; 4]$ est donnée ci-dessous. La tangente T à la courbe au point d'abscisse 0 traverse la courbe en ce point.

La fonction f est convexe sur l'intervalle :

- a. $[-1; 4]$
 b. $[-2; 0]$
 c. $[-2; -1]$
 d. $[0; 4]$



3. On donne l'algorithme ci-dessous.

La valeur affichée en sortie de cet algorithme est :

- a. 7,1
 b. 7,6
 c. 8
 d. 17

Variables
 n : un nombre entier naturel

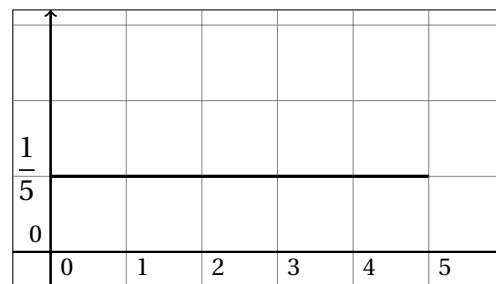
Traitement
 Affecter à n la valeur 0
 Tant que $1,9^n < 100$
 Affecter à n la valeur $n+1$
 Fin Tant que

Sortie
 Afficher n

4. Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0; 5]$ dont la fonction de densité est représentée ci-dessous.

On a alors :

- a. $P(X \geq 3) = P(X < 3)$
 b. $P(1 \leq X \leq 4) = \frac{1}{3}$
 c. $E(X) = \frac{5}{2}$
 d. $E(X) = \frac{1}{5}$



EXERCICE 2 (5 points)

Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats L

Les parties A et B sont indépendantes.

Sur une exploitation agricole, une maladie rend la conservation de fruits difficile. Un organisme de recherche en agronomie teste un traitement sur un champ : sur une partie du champ, les fruits sont traités, sur l'autre, non.

On considère que le nombre de fruits récoltés est extrêmement grand et que la maladie touche les fruits de manière aléatoire.

Partie A Étude de l'efficacité du traitement

On prélève au hasard 100 fruits sur la partie du champ traité et 100 fruits sur l'autre partie du champ. On constate que :

- sur l'échantillon des 100 fruits traités, 18 sont abimés ;
- sur l'échantillon des 100 fruits non traités, 32 sont abimés.

1. Déterminer un intervalle de confiance de la proportion de fruits abimés par la maladie au niveau de confiance de 95 % :
 - a. pour la partie du champ traitée ;
 - b. pour la partie du champ non traitée.
2. Au vu des intervalles obtenus à la question 1, peut-on considérer que le traitement est efficace ?

Partie B Qualité de la production

Une étude plus poussée permet d'estimer la proportion de fruits abimés à 0,12 dans la partie du champ traitée et à 0,30 dans la partie non traitée.

On sait de plus qu'un quart du champ a été traité.

Une fois récoltés, les fruits sont mélangés sans distinguer la partie du champ d'où ils proviennent.

On prélève au hasard un fruit récolté dans le champ et on note :

T l'évènement « Le fruit prélevé provient de la partie traitée » ;

A l'évènement « Le fruit prélevé est abimé ».

On arrondira les résultats au millième.

1. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.
2.
 - a. Calculer la probabilité que le fruit prélevé soit traité et abimé.
 - b. Montrer que $P(A) = 0,255$.
3. Un fruit prélevé au hasard dans la récolte est abimé. Peut-on affirmer qu'il y a une chance sur quatre pour qu'il provienne de la partie du champ traitée ?
4. Dans le but d'effectuer un contrôle, cinq fruits sont prélevés au hasard dans le champ. Calculer la probabilité qu'au plus un fruit soit abimé.

EXERCICE 3 (6 points) Commun à tous les candidats

Les techniciens d'un aquarium souhaitent régler le distributeur automatique d'un produit visant à améliorer la qualité de l'eau dans un bassin. La concentration recommandée du produit, exprimée en mg.l^{-1} (milligramme par litre), doit être comprise entre 140 mg.l^{-1} et 180 mg.l^{-1} .

Au début du test, la concentration du produit dans ce bassin est de 160 mg.l^{-1} .

On estime que la concentration du produit baisse d'environ 10 % par semaine.

Afin de respecter les recommandations portant sur la concentration du produit, les techniciens envisagent de régler le distributeur automatique de telle sorte qu'il déverse chaque semaine une certaine quantité de produit.

Les techniciens cherchent à déterminer cette quantité de façon à ce que :

- la concentration du produit soit conforme aux recommandations sans intervention de leur part, pendant une durée de 6 semaines au moins ;
- la quantité de produit consommée soit minimale.

Partie A

Dans cette partie, on suppose que la quantité de produit déversée chaque semaine par le distributeur automatique est telle que la concentration augmente de 10 mg.l^{-1} .

On s'intéresse à l'évolution de la concentration chaque semaine. La situation peut être modélisée par une suite (C_n) , le terme C_n donnant une estimation de la concentration du produit, en mg.l^{-1} , au début de la $n^{\text{ième}}$ semaine. On a $C_0 = 160$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n , $C_{n+1} = 0,9 \times C_n + 10$.
2. Soit la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par : $V_n = C_n - 100$.
 - a. Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et que $V_0 = 60$.
 - b. Exprimer V_n en fonction de n .
 - c. En déduire que pour tout entier naturel n , $C_n = 0,9^n \times 60 + 100$.
3.
 - a. Déterminer la limite de la suite (C_n) quand n tend vers l'infini. Justifier la réponse. Interpréter le résultat au regard de la situation étudiée.
 - b. Au bout de combien de semaines la concentration devient-elle inférieure à 140 mg.l^{-1} ?
4. Le réglage envisagé du distributeur répond-il aux attentes ?

Partie B

Dans cette partie, on suppose que la quantité de produit déversée chaque semaine par le distributeur automatique est telle que la concentration augmente de 12 mg.l^{-1} .

Que penser de ce réglage au regard des deux conditions fixées par les techniciens ?

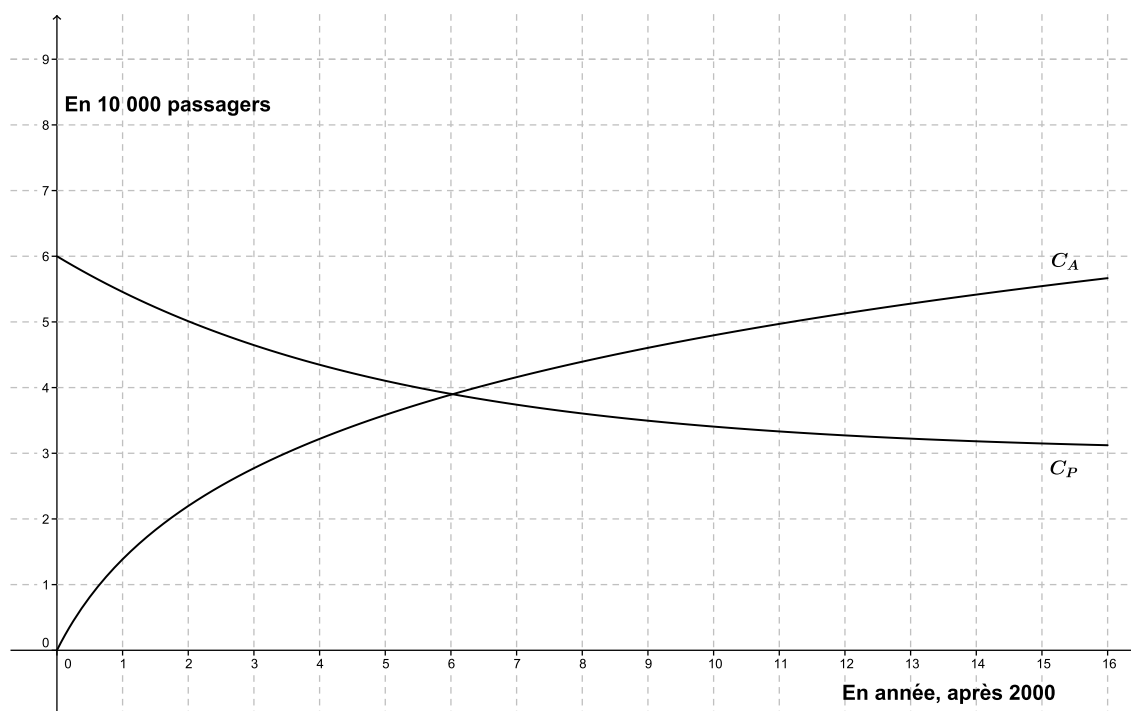
EXERCICE 4 (5 points) Commun à tous les candidats

Une compagnie aérienne propose à partir du premier janvier de l'année 2000 une nouvelle formule d'achat de billets, la formule *Avantage* qui s'ajoute à la formule *Privilège* déjà existante.

Une étude a permis de modéliser l'évolution du nombre de passagers transportés depuis l'année 2000 et la compagnie admet que ce modèle est valable sur la période allant de l'année 2000 à l'année 2016.

Le nombre de passagers choisissant la formule *Privilège* est modélisé par la fonction P définie sur l'intervalle $[0; 16]$ et le nombre de passagers choisissant la formule *Avantage* est modélisé par la fonction A définie sur l'intervalle $[0; 16]$. Le graphique donné ci-dessous représente les courbes représentatives C_P et C_A de ces deux fonctions.

Lorsque x représente le temps en année à partir de l'année 2000, $P(x)$ représente le nombre de passagers, exprimé en dizaine de milliers, choisissant la formule *Privilège* et $A(x)$ représente le nombre de passagers, exprimé en dizaine de milliers, choisissant la formule *Avantage*.



Partie A

Dans cette partie, les estimations seront obtenues par lecture graphique.

1. Donner une estimation du nombre de passagers qui, au cours de l'année 2002, avaient choisi la formule *Privilège*.
2. Donner une estimation de l'écart auquel la compagnie peut s'attendre en 2015 entre le nombre de passagers ayant choisi la formule *Avantage* et ceux ayant choisi la formule *Privilège*.

3. Comment peut-on interpréter les coordonnées du point d'intersection des deux courbes au regard de la situation proposée ?
4. Justifier que la compagnie aérienne peut, selon ce modèle, estimer que le nombre total de passagers ayant choisi la formule *Privilège* durant la période entre 2007 et 2015 sera compris entre 24 000 et 32 000.

Partie B

On admet que la fonction A est définie sur l'intervalle $[0 ; 16]$ par $A(x) = 2\ln(x + 1)$ et que la fonction P est définie sur l'intervalle $[0 ; 16]$ par $P(x) = 3 + 3e^{-0,2x}$.

On s'intéresse à la différence en fonction du temps qu'il y a entre le nombre de passagers ayant choisi la formule *Avantage* et ceux ayant choisi la formule *Privilège*. Pour cela, on considère la fonction E définie sur l'intervalle $[0 ; 16]$ par $E(x) = A(x) - P(x)$.

1. On note E' la fonction dérivée de E sur l'intervalle $[0 ; 16]$.
 - a. On admet que $E'(x) = \frac{2}{x+1} + 0,6e^{-0,2x}$. Justifier que E' est strictement positive sur l'intervalle $[0 ; 16]$.
 - b. Dresser le tableau de variation de la fonction E sur l'intervalle $[0 ; 16]$.
2.
 - a. Montrer que l'équation $E(x) = 0$ admet une unique solution, notée α , sur l'intervalle $[0 ; 16]$. Donner la valeur de α en arrondissant au dixième.
 - b. Dresser le tableau de signes de la fonction E sur l'intervalle $[0 ; 16]$. Interpréter les résultats obtenus au regard des deux formules proposées par la compagnie aérienne.

EXERCICE 2

[Polynésie 2015]

Partie B: Production et qualité

1. Représentons la situation par un arbre pondéré:

D'après l'énoncé, nous avons:

- T = " le fruit prélevé provient de la partie traitée ".
- \bar{T} = " le fruit prélevé ne provient pas de la partie traitée ".
- A = " le fruit est abîmé ".
- \bar{A} = " le fruit n'est pas abîmé ".

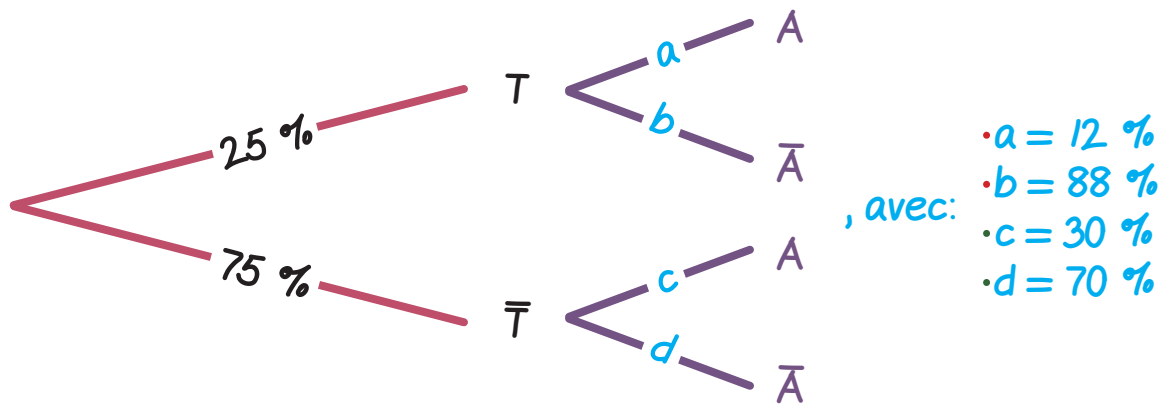
- $P(T) = 25\%$
- $P(\bar{T}) = 75\%$
($25\% + 75\% = 1$).

- $P_T(A) = 12\%$
- $P_T(\bar{A}) = 88\%$
($12\% + 88\% = 1$).

- $P_{\bar{T}}(A) = 30\%$
- $P_{\bar{T}}(\bar{A}) = 70\%$
($70\% + 30\% = 1$).

Nous allons représenter la situation par un arbre pondéré.

D'où l'arbre pondéré suivant:



2. a. Calculons la probabilité que le fruit prélevé soit traité et abîmé:

Cela revient à calculer: $P(T \cap A)$.

$$P(T \cap A) = P_T(A) \times P(T).$$

$$\text{Ainsi: } P(T \cap A) = 12\% \times 25\% \Rightarrow P(T \cap A) = 3\%.$$

Au total, il y a 3% de chance pour que le fruit prélevé soit traité et abîmé.

2. b. Montrons que $P(A) = 0.255$:

$$\text{L'événement } A = (A \cap T) \cup (A \cap \bar{T}).$$

$$\text{D'où: } P(A) = P(A \cap T) + P(A \cap \bar{T})$$

$$= P(T \cap A) + P_{\bar{T}}(A) \times P(\bar{T}).$$

$$\text{Ainsi: } P(A) = 3\% + 30\% \times 75\%$$

$$\Rightarrow P(A) = 25.5\%.$$

Au total, il y a 25.5% de chance pour que le fruit soit abîmé.

3. Peut-on affirmer que $P_A(T) = 25\%$?

$$P_A(T) = \frac{P(A \cap T)}{P(A)} \iff P_A(T) = \frac{P(T \cap A)}{P(A)}$$

$$\text{Ainsi: } P_A(T) = \frac{3\%}{25.5\%} \Rightarrow P_A(T) = 12\%$$

Comme $12\% \neq 25\%$, la réponse est: non.

4. Calculons la probabilité qu'au plus un fruit soit abîmé:

Soit l'expérience aléatoire consistant à prélever au hasard un lot de 5 fruits dans le champ.

Soient les événements $A =$ " le fruit est abîmé ", et $\bar{A} =$ " le fruit n'est pas abîmé ".

On désigne par X le nombre de fruits abîmés contenus dans ce lot de 5 fruits.

Nous sommes en présence de 5 épreuves aléatoires indépendantes avec $\Omega = \{ A ; \bar{A} \}$ et $X(\Omega) = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$.

En fait on répète 5 fois un schéma de Bernoulli.

La variable aléatoire discrète X représentant le nombre de réalisations de A suit donc une loi binômiale de paramètres: $n = 5$ et $p = 25.5\%$.

Et nous pouvons noter: $X \rightsquigarrow B(5; 25.5\%)$.

Ici nous devons calculer: $P(X \leq 1)$, avec: $X \rightsquigarrow B(5; 25.5\%)$.

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$$

$$= \binom{5}{0} (25.5\%)^0 (1 - 25.5\%)^5 + \binom{5}{1} (25.5\%)^1 (74.5\%)^4$$

$$\Rightarrow P(X \leq 1) \approx 0.622.$$

(à l'aide de la machine à calculer)

Au total, il y a 62.2% de chance pour que:

" au plus un fruit soit abîmé, sur 5 fruits prélevés ".