# Sujet + Corrigé

## ANNALES MATHÉMATIQUES BAC ES
## PROBABILITÉS - 2015

**SUJET 5**
**LIBAN**
**BAC ES - 2015**

## Correction Réalisée Par Alain PILLER

alainpiller.fr

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

## Session 2015

## MATHÉMATIQUES
## - Série ES -

## ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

***Durée de l'épreuve : 3 heures - Coefficient : 5***

## MATHÉMATIQUES
## - Série L -

## ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

***Durée de l'épreuve : 3 heures - Coefficient : 4***

***Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.***

***Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.***
***Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.***
***Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.***
***Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.***

***Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.***

**EXERCICE 1 (4 points)**

***Commun à tous les candidats***

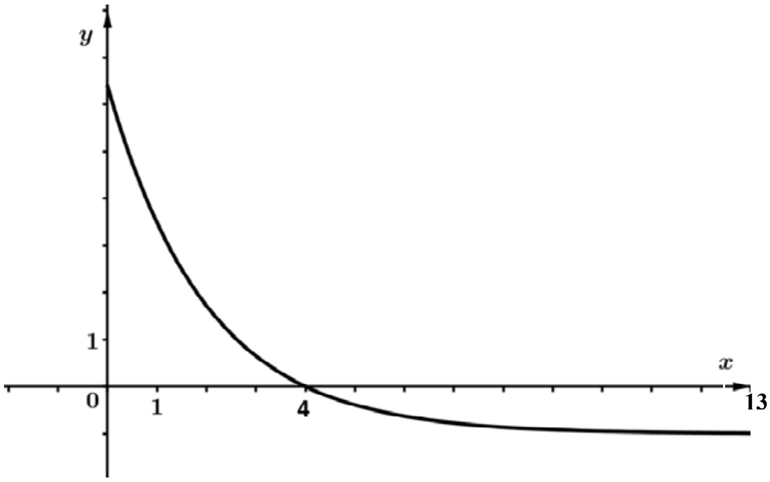
*Pour chacune des propositions suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.*

**1)** On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction $f$ définie sur l'intervalle $[-3\,;1]$.

| $x$ | $-3$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|
| Variations de $f$ | $-6$ ↗ | $-1$ ↘ | $-2$ ↗ | $4$ |

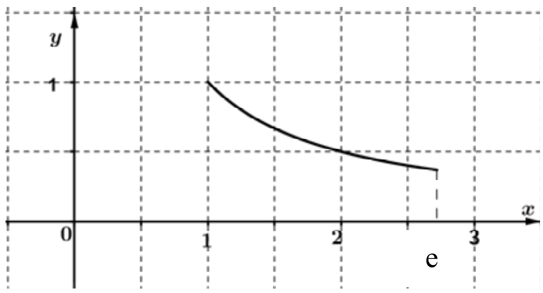
**Proposition 1** : L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-3\,;1]$.

**2)** On considère une fonction $g$ définie et dérivable sur l'intervalle $[0; 13]$ et on donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction $g'$, fonction dérivée de la fonction $g$ sur l'intervalle $[0; 13]$.




**Proposition 2 :** La fonction $g$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[0; 4]$.
**Proposition 3 :** La fonction $g$ est concave sur l'intervalle $[0; 13]$.

**3)** La courbe ci-dessous est la représentation graphique de la fonction $h$ définie sur l'intervalle $[1; \mathrm{e}]$ par $h(x) = \dfrac{1}{x}$.

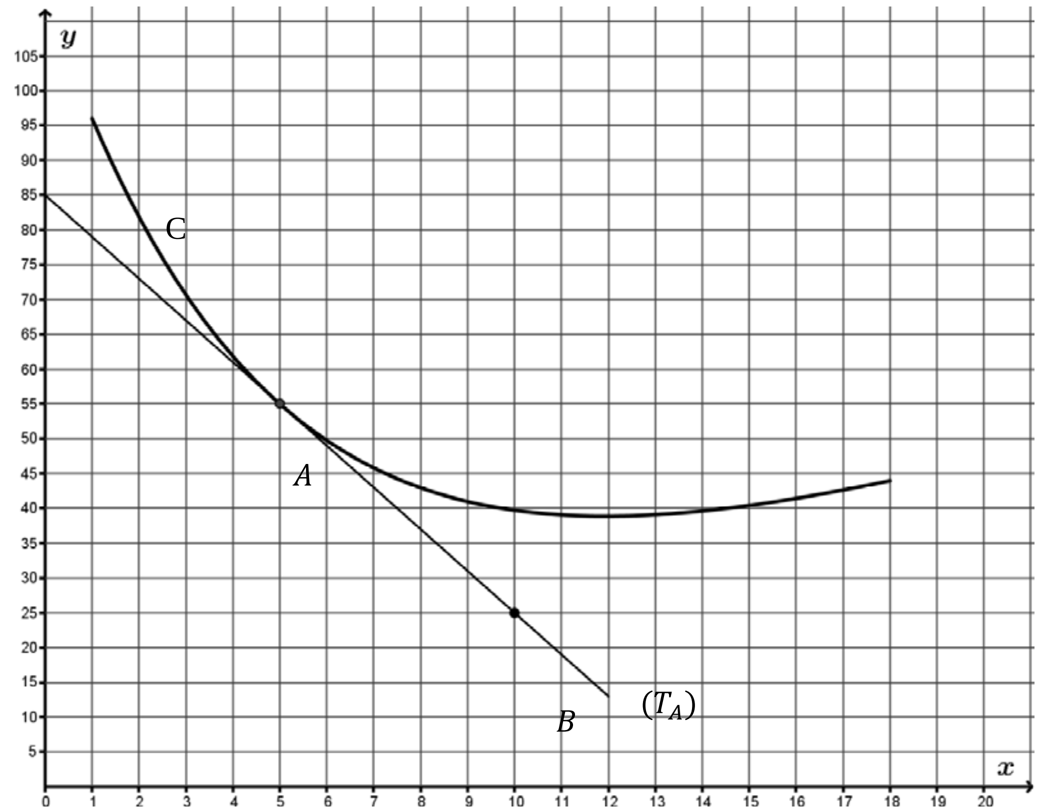



**Proposition 4 :** La fonction $h$ est une fonction de densité de probabilité sur l'intervalle $[1; \mathrm{e}]$.

**EXERCICE 2 (5 points)**

***Commun à tous les candidats***

Une entreprise artisanale produit des parasols. Elle en fabrique entre 1 à 18 par jour. Le coût de fabrication unitaire est modélisé par une fonction $f$ définie et dérivable sur l'intervalle $[1\,;18]$.
On note $x$ le nombre de parasols produits par jour et $f(x)$ le coût de fabrication unitaire exprimé en euros.
Dans le repère orthogonal ci-dessous, on a tracé la courbe représentative C de la fonction $f$ et la tangente $(T_A)$ à la courbe C au point $A(5; 55)$. Le point $B(10\,; 25)$ appartient à la tangente $(T_A)$.




On admet que $f(x) = 2x + 5 + 40\mathrm{e}^{-0,2x+1}$ pour tout $x$ appartenant à l'intervalle $[1\,;18]$.

**1) a)** Déterminer graphiquement la valeur de $f'(5)$ en expliquant la démarche utilisée.

**b)** Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour tout $x$ appartenant à l'intervalle $[1; 18]$.

**c)** Expliquer comment retrouver la réponse obtenue dans la question **1) a).**

**2) a)** Montrer que $2 - 8\,\mathrm{e}^{-0,2x+1} \geq 0$ est équivalent à $x \geq 5 + 5\ln 4$.

**b)** En déduire le signe de $f'(x)$ et le tableau de variations de $f$ sur $[1\,;18]$. Les valeurs seront arrondies au centime d'euro dans le tableau de variations.

**3)** Déterminer, par le calcul, le nombre de parasols que doit produire l'entreprise pour que le coût de fabrication unitaire soit minimal.

**4) a)** Montrer que la fonction $F$ définie par $F(x) = x^2 + 5x - 200\,\mathrm{e}^{-0,2x+1}$ est une primitive de $f$ sur l'intervalle $[1\,;\ 18]$.

**b)** Déterminer la valeur exacte de l'intégrale $I = \int_5^{15} f(x)dx$.

**c)** Interpréter dans le contexte de l'exercice la valeur de $\frac{1}{10}\,I$.

**EXERCICE 3 (6 points)**

***Commun à tous les candidats***

Les trois parties peuvent être traitées indépendamment.

*Les résultats seront arrondis, si nécessaire, à* $10^{-3}$.

Une entreprise fabrique en grande quantité des médailles circulaires.
La totalité de la production est réalisée par deux machines $M_A$ et $M_B$.
La machine $M_A$ fournit 40 % de la production totale et $M_B$ le reste.
La machine $M_A$ produit 2 % de médailles défectueuses et la machine $M_B$ produit 3 % de médailles défectueuses.

**Partie A**

On prélève au hasard une médaille fabriquée par l'entreprise et on considère les événements suivants :

- $A$ : « la médaille provient de la machine $M_A$ » ;
- $B$ : « la médaille provient de la machine $M_B$ » ;
- $D$ : « la médaille est défectueuse » ;
- $\overline{D}$ est l'événement contraire de $D$.

**1) a)** Traduire cette situation par un arbre pondéré.
**b)** Montrer que la probabilité qu'une médaille soit défectueuse est égale à 0,026.
**c)** Calculer la probabilité qu'une médaille soit produite par la machine $M_A$ sachant qu'elle est défectueuse.

**2**) Les médailles produites sont livrées par lots de 20.
On prélève au hasard un lot de 20 médailles dans la production.
On suppose que la production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise. Les tirages sont supposés indépendants.
On note $X$ la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de médailles défectueuses contenues dans ce lot.

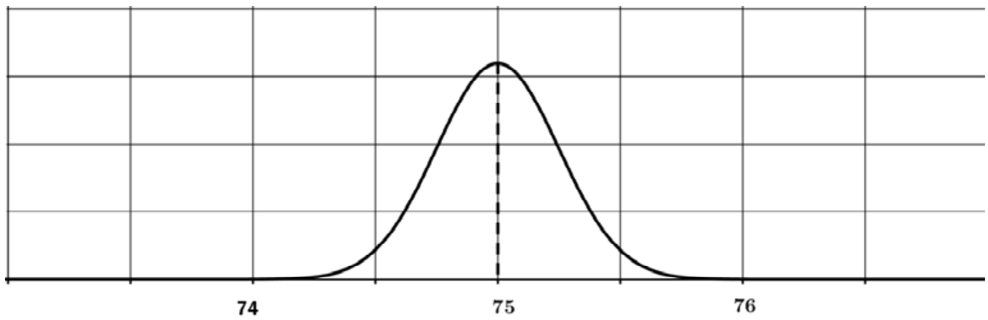
**a)** Préciser la loi que suit $X$ et donner ses paramètres.

**b)** Calculer la probabilité qu'il y ait au plus une médaille défectueuse dans ce lot.

**Partie B**

Le diamètre, exprimé en millimètre, d'une médaille fabriquée par cette entreprise est conforme lorsqu'il appartient à l'intervalle $[74{,}4\,;75{,}6]$.
On note $Y$ la variable aléatoire qui, à chaque médaille prélevée au hasard dans la production, associe son diamètre en millimètre. On suppose que la variable aléatoire $Y$ suit une loi normale de moyenne $\mu$ et d'écart-type 0,25.

La courbe ci-dessous est la représentation graphique de la densité de probabilité de $Y$.




**1)** Indiquer par lecture graphique la valeur de $\mu$.

**2)** Déterminer à l'aide de la calculatrice la probabilité $P(74{,}4 \leq Y \leq 75{,}6)$.

**3**) En utilisant un résultat du cours, déterminer la valeur de $h$ pour que

$$P(75 - h \leq Y \leq 75 + h) \approx 0{,}95.$$

**Partie C**

Dans le cadre d'un fonctionnement correct de la machine $M_B$, on admet que la proportion des médailles ayant une épaisseur non conforme dans la production est 3 %.
Pour contrôler le bon fonctionnement de la machine $M_B$, on a prélevé au hasard un échantillon de 180 médailles et on a constaté que 11 médailles ont une épaisseur non conforme.

**1)** Calculer, dans l'échantillon prélevé, la fréquence des médailles dont l'épaisseur n'est pas conforme.

**2)** Déterminer, en justifiant, si le résultat de la question précédente rend pertinente la prise de décision d'arrêter la production pour procéder au réglage de la machine $M_B$.

## EXERCICE 4 (5 points)

***Commun à tous les candidats***

Une retenue d'eau artificielle contient 100 000 $m^3$ d'eau le 1er juillet 2013 au matin.
La chaleur provoque dans la retenue une évaporation de 4 % du volume total de l'eau par jour. De plus, chaque soir, on doit libérer de la retenue 500 $m^3$ pour l'irrigation des cultures aux alentours.
Cette situation peut être modélisée par une suite $(V_n)$.
Le premier juillet 2013 au matin, le volume d'eau en $m^3$ est $V_0 = 100\ 000$.

Pour tout entier naturel $n$ supérieur à 0, $V_n$ désigne le volume d'eau en $m^3$ au matin du $n$-ième jour qui suit le 1er juillet 2013.

**1) a)** Justifier que le volume d'eau $V_1$ au matin du 2 juillet 2013 est égal à $95\ 500\ m^3$.
**b)** Déterminer le volume d'eau $V_2$ au matin du 3 juillet 2013.
**c)** Montrer que, pour tout entier naturel $n$, on a $V_{n+1} = 0{,}96V_n - 500$.

**2**) Pour déterminer à quelle date la retenue ne contiendra plus d'eau, on a commencé par élaborer l'algorithme ci-dessous. Recopier et compléter les lignes **L6**, **L7** et **L9** de cet algorithme pour qu'il donne le résultat attendu.

| | | |
|---|---|---|
| **L1** | **Variables :** | $V$ est un nombre réel |
| **L2** | | $N$ est un entier naturel |
| **L3** | **Traitement :** | Affecter à $V$ la valeur 100 000 |
| **L4** | | Affecter à $N$ la valeur 0 |
| **L5** | | Tant que $V > 0$ |
| **L6** | | Affecter à $V$ la valeur ……… |
| **L7** | | Affecter à $N$ la valeur ……… |
| **L8** | | Fin Tant que |
| **L9** | **Sortie** : | Afficher ……. |

**3)** On considère la suite $(U_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $U_n = V_n + 12\ 500$.
**a)** Montrer que la suite $(U_n)$ est une suite géométrique de raison 0,96. Préciser son premier terme.
**b**) Exprimer $U_n$ en fonction de $n$.
**c)** En déduire que, pour tout entier naturel $n$, $V_n = 112\ 500 \times 0{,}96^n - 12\ 500$.

**4) a)** Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $112\ 500 \times 0{,}96^n - 12\ 500 \leq 0$.
**b**) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

# EXERCICE 3

## [ Liban 2015 ]

### Partie A: Les médailles circulaires

**1. a. Représentons la situation par un arbre pondéré:**

D'après l'énoncé, nous avons:

- $A =$ " la médaille provient de $M_A$ ".
- $B =$ " la médaille provient de $M_B$ ".
- $D =$ " la médaille est défectueuse ".
- $\overline{D} =$ " la médaille n'est pas défectueuse ".

- $P(M_A) = 40\%$
- $P(M_B) = 60\%$

$(40\% + 60\% = 1)$.

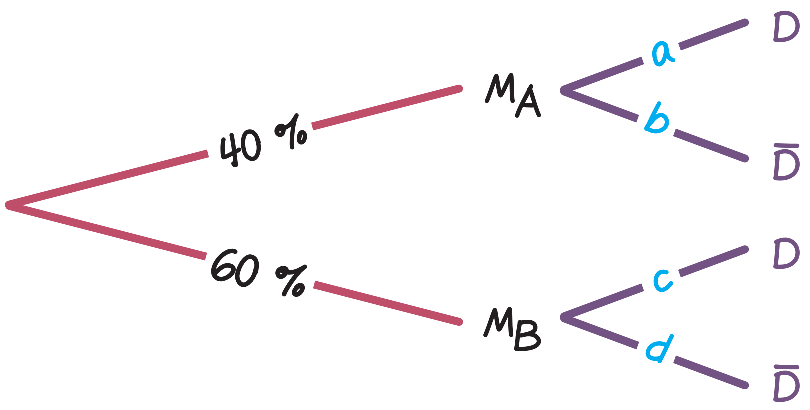
- $P_{M_A}(D) = 2\%$
- $P_{M_A}(\overline{D}) = 98\%$

$(2\% + 98\% = 1)$.

- $P_{M_B}(D) = 3\%$
- $P_{M_B}(\overline{D}) = 97\%$

$(3\% + 97\% = 1)$.

D'où l'arbre pondéré suivant:




, avec:
- $a = 2\ \%$
- $b = 98\ \%$
- $c = 3\ \%$
- $d = 97\ \%$

.

**1. b. Montrons que $P(D) = 0.026$:**

L'événement $D = (D \cap M_A) \cup (D \cap M_B)$.

D'où: $P(D) = P(D \cap M_A) + P(D \cap M_B)$

$$= P_{M_A}(D) \times P(M_A) + P_{M_B}(D) \times P(M_B).$$

Ainsi: $P(D) = 2\% \times 40\% + 3\% \times 60\%$ => $P(D) = 0.026$.

Au total, il y a 2.6% de chance pour que la médaille soit défectueuse.

**1. c. Calculons $P_D(M_A)$:**

$$P_D(M_A) = \frac{P(D \cap M_A)}{P(D)}$$

$$= \frac{P_{M_A}(D) \times P(M_A)}{P(D)}.$$

Ainsi: $P_D(M_A) = \dfrac{2\% \times 40\%}{2.6\%}$ => $P_D(M_A) \approx 30.8\%$.

Au total, il y a 30. 8% de chance pour que la médaille soit produite par la machine $M_A$ sachant qu'elle est défectueuse.

**2. a. Précisons la loi que suit X ainsi que ses paramètres**:

Soit l'expérience aléatoire consistant à choisir au hasard un lot de 20 médailles dans la production.

Soient les événements $A$ = " la médaille est défectueuse ", et $\bar{A}$ = " la médaille n'est pas défectueuse ".

On désigne par X le nombre de fois où l'événement A s'est réalisé au cours des 20 épreuves.

Nous sommes en présence de 20 épreuves aléatoires indépendantes avec $\Omega = \{ A ; \bar{A} \}$ et $X(\Omega) = \{ 0, 1, 2, \dots, 20 \}$.

En fait, on répète 20 fois un schéma de Bernoulli.

La variable aléatoire X représentant le nombre de réalisations de A suit donc une loi binômiale de paramètres: $n = 20$ et $p = 2.6\%$.

Et nous pouvons noter: $X \rightsquigarrow B(20 ; 2.6\%)$.

**2. b. Calculons P ( X ≤ 1 )**:

$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$, avec: $X \rightsquigarrow B(20 ; 2.6\%)$.

D'où: $P(X \leq 1) = \binom{20}{0}(2.6\%)^0(1 - 2.6\%)^{20} + \binom{20}{1}(2.6\%)^1(1 - 2.6\%)^{19}$

$\Rightarrow \quad P(X \leq 1) \approx 90.6\%$.

( à l'aide d'une machine à calculer )

Au total, il y a 90. 6% de chance pour qu'il y ait au plus 1 médaille défectueuse dans ce lot de 20 médailles.