



**Annales Mathématiques Bac 2015**  
**Sujets + Corrigés - Alain Pillier**  
**Centres étrangers**

**Alain PILLER — Sujet 4**

**EXERCICE 1**

**4 points**

**Commun à tous les candidats**

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.*

*Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte.*

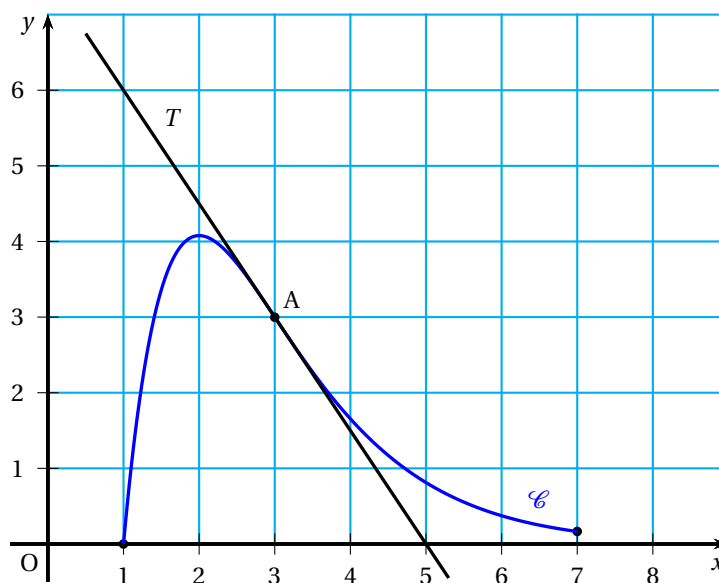
*Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fautive ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.*

*Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.*

La courbe  $\mathcal{C}$  ci-dessous est la représentation graphique, dans un repère orthonormé, d'une fonction  $f$  définie et deux fois dérivable sur l'intervalle  $[1; 7]$ .

La droite  $T$  est tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point  $A(3; 3)$  et passe par le point de coordonnées  $(5; 0)$ .

Le point  $A$  est l'unique point d'inflexion de la courbe  $\mathcal{C}$ .



1. On note  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$  :

- a.  $f'(3) = 3$       b.  $f'(3) = \frac{3}{2}$       c.  $f'(3) = -\frac{2}{3}$       d.  $f'(3) = -\frac{3}{2}$

2. On note  $f''$  la fonction dérivée seconde de la fonction  $f$  :

- a.  $f''(3) = 3$       b.  $f''(3) = 0$       c.  $f''(5) = 0$       d.  $f''(2) = 0$

3. Toute primitive  $F$  de la fonction  $f$  est nécessairement :

- a. croissante sur  $[1; 7]$       b. décroissante sur  $[2; 7]$       c. négative sur  $[2; 7]$       d. positive sur  $[1; 7]$

4. On note  $I = \int_2^3 f(x) dx$  :

- a.  $1 \leq I \leq 2$       b.  $2 \leq I \leq 3$       c.  $3 \leq I \leq 4$       d.  $4 \leq I \leq 5$

**EXERCICE 2**

**5 points**

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Depuis le 1<sup>er</sup> janvier 2015, une commune dispose de vélos en libre service. La société Bicycl'Aime est chargée de l'exploitation et de l'entretien du parc de vélos.

La commune disposait de 200 vélos au 1<sup>er</sup> janvier 2015.

La société estime que, chaque année, 15% des vélos sont retirés de la circulation à cause de dégradations et que 42 nouveaux vélos sont mis en service.

On modélise cette situation par une suite  $(u_n)$  où  $u_n$  représente le nombre de vélos de cette commune au 1<sup>er</sup> janvier de l'année 2015 +  $n$ .

1. Déterminer le nombre de vélos au 1<sup>er</sup> janvier 2016.
2. Justifier que la suite  $(u_n)$  est définie par  $u_0 = 200$  et, pour tout entier naturel  $n$ , par :

$$u_{n+1} = 0,85u_n + 42.$$

3. On donne l'algorithme suivant :

<b>Variables :</b>	$N$ entier $U$ réel
<b>Initialisation :</b>	$N$ prend la valeur 0 $U$ prend la valeur 200
<b>Traitement :</b>	Tant que $N < 4$ $U$ prend la valeur $0,85 \times U + 42$ $N$ prend la valeur $N + 1$ Fin tant que
<b>Sortie :</b>	Afficher $U$

- a. Recopier et compléter le tableau suivant en arrondissant les résultats à l'unité. Quel nombre obtient-on à l'arrêt de l'algorithme ?

$U$	200				
$N$	0	1	2	3	4
Condition $N < 4$	Vrai				

- b. Interpréter la valeur du nombre  $U$  obtenue à l'issue de l'exécution de cet algorithme.
4. On considère la suite  $(v_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $v_n = u_n - 280$ .
  - a. Montrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison 0,85 et de premier terme  $v_0 = -80$ .
  - b. Pour tout entier naturel  $n$ , exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .
  - c. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n = -80 \times 0,85^n + 280$ .
  - d. Calculer la limite de la suite  $(u_n)$  et interpréter ce résultat.
5. La société Bicycl'Aime facture chaque année à la commune 300 € par vélo en circulation au 1<sup>er</sup> janvier.  
Déterminer le coût total pour la période du 1<sup>er</sup> janvier 2015 au 31 décembre 2019, chacun des termes utilisés de la suite  $(u_n)$  étant exprimé avec un nombre entier.

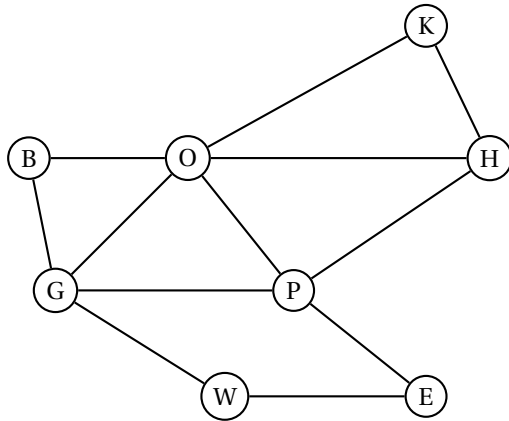
**EXERCICE 2**

**5 points**

**Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité**

On a schématisé ci-dessous une partie du plan du métro londonien par un graphe  $\Gamma$  dont les sommets sont les stations et les arêtes sont les lignes desservant ces stations.

Chaque station de métro est désignée par son initiale comme indiqué dans la légende.



**Légende :**

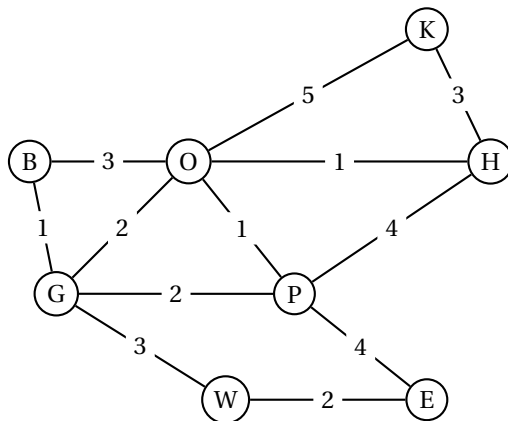
- B : Bond Street
- E : Embankment
- G : Green Park
- H : Holborn
- K : King's Cross St Pancras
- O : Oxford Circus
- P : Piccadilly Circus
- W : Westminster

1. **a.** Déterminer en justifiant si le graphe  $\Gamma$  est connexe.
- b.** Déterminer en justifiant si le graphe  $\Gamma$  est complet.
2. Déterminer, en justifiant, si le graphe  $\Gamma$  admet une chaîne eulérienne. Si oui, donner une telle chaîne.
3. Donner la matrice d'adjacence  $M$  du graphe  $\Gamma$  (les sommets seront rangés dans l'ordre alphabétique).

Pour la suite de l'exercice, on donne la matrice  $M^3 =$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 & 2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 6 & 4 \\ 6 & 1 & 4 & 4 & 4 & 9 & 10 & 6 \\ 4 & 1 & 4 & 4 & 5 & 8 & 8 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 5 & 2 & 7 & 3 & 1 \\ 7 & 3 & 9 & 8 & 7 & 8 & 10 & 3 \\ 3 & 6 & 10 & 8 & 3 & 10 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 3 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Un touriste se trouve à la station Holborn. Il prévoit de se rendre à la station Green Park en utilisant exactement trois lignes de métro sur son trajet.
  - a.** Sans utiliser le graphe, donner le nombre de trajets possibles et justifier la réponse.
  - b.** Donner les trajets possibles .



**Légende :**

- B : Bond Street
- E : Embankment
- G : Green Park
- H : Holborn
- K : King's Cross St Pancras
- O : Oxford Circus
- P : Piccadilly Circus
- W : Westminster

Sur le graphe pondéré ci-dessus, on a indiqué la durée, exprimée en minutes, des trajets entre chaque station (la durée est indiquée sur chaque arête du graphe  $\Gamma$ ).

5. À partir de la station Westminster, ce touriste doit rejoindre la station King's Cross St Pancras le plus rapidement possible pour prendre un train.

En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminer le trajet permettant de relier la station Westminster à la station King's Cross St Pancras en une durée minimale. On précisera cette durée.

Sujet Mathématiques Bac 2015  
probabilités ES - corrigé

### EXERCICE 3

5 points

#### Commun à tous les candidats

*Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante. Dans cet exercice, les résultats seront arrondis au millième.*

#### Partie A

Une entreprise spécialisée dans la fabrication de confitures fait appel à des producteurs locaux. À la livraison, l'entreprise effectue un contrôle qualité à l'issue duquel les fruits sont sélectionnés ou non pour la préparation des confitures.

Une étude statistique a établi que :

- 22 % des fruits livrés sont issus de l'agriculture biologique ;
- parmi les fruits issus de l'agriculture biologique, 95 % sont sélectionnés pour la préparation des confitures ;
- parmi les fruits non issus de l'agriculture biologique, 90 % sont sélectionnés pour la préparation des confitures.

On prélève au hasard un fruit et on note :

$B$  l'évènement « le fruit est issu de l'agriculture biologique » ;

$S$  l'évènement « le fruit est sélectionné pour la préparation des confitures ».

Pour tout évènement  $E$ , on note  $p(E)$  sa probabilité,  $p_F(E)$  la probabilité de l'évènement  $E$  sachant que l'évènement  $F$  est réalisé et  $\bar{E}$  évènement contraire de  $E$ .

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Déterminer la probabilité que le fruit soit sélectionné pour la préparation des confitures et qu'il soit issu de l'agriculture biologique.
3. Montrer que  $p(S) = 0,911$ .
4. Sachant que le fruit a été sélectionné pour la préparation des confitures, déterminer la probabilité qu'il ne soit pas issu de l'agriculture biologique.

#### Partie B

Cette entreprise conditionne la confiture en pots de 300 grammes.

On note  $X$  la variable aléatoire qui, à chaque pot de confiture, associe sa masse en gramme.

On admet que  $X$  suit la loi normale d'espérance  $\mu = 300$  et d'écart-type  $\sigma = 2$ .

L'entreprise ne commercialise les pots de confiture que si l'écart entre la masse affichée (c'est-à-dire 300 g) et la masse réelle ne dépasse pas 4 grammes.

1. On prélève un pot au hasard. Déterminer la probabilité que le pot soit commercialisé.
2. Déterminer le réel  $a$  tel que  $p(X < a) = 0,01$ .

#### Partie C

*Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Le directeur commercial affirme que 90 % des consommateurs sont satisfaits de la qualité des produits commercialisés par son entreprise.

On réalise une étude de satisfaction sur un échantillon de 130 personnes.

Parmi les personnes interrogées, 15 déclarent ne pas être satisfaites des produits.

Déterminer, en justifiant, si l'on doit remettre en question l'affirmation du directeur commercial.

**EXERCICE 4**  
**Commun à tous les candidats**

**6 points**

Les parties A et B ne sont pas indépendantes

**Partie A**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[1 ; 11]$  par

$$f(x) = -0,5x^2 + 2x + 15 \ln x.$$

1. Montrer que  $f'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 15}{x}$  où  $f'$  désigne la fonction dérivée de la fonction  $f$ .
2. Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[1 ; 11]$ . On donnera les valeurs exactes des éléments du tableau.
3. a. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur l'intervalle  $[1 ; 11]$ .  
b. Donner une valeur approchée de  $\alpha$  à 0,01 près.  
c. Déterminer le signe de  $f(x)$  suivant les valeurs de  $x$  dans l'intervalle  $[1 ; 11]$ .
4. a. On considère la fonction  $F$  définie sur  $[1 ; 11]$  par

$$F(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - 15x + 15x \ln x.$$

Montrer que  $F$  est une primitive de la fonction  $f$

- b. Calculer  $\int_1^{11} f(x) dx$ . On donnera le résultat exact puis sa valeur arrondie au centième.
- c. En déduire la valeur moyenne de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[1 ; 11]$ . (On donnera la valeur arrondie au centième.)

**Partie B**

Une société fabrique et vend des chaises de jardin. La capacité de production mensuelle est comprise entre 100 et 1 100 chaises.

Le bénéfice mensuel réalisé par la société est modélisé par la fonction  $f$  définie dans la partie A, où  $x$  représente le nombre de centaines de chaises de jardin produites et vendues et  $f(x)$  représente le bénéfice mensuel, exprimé en milliers d'euros.

On précise qu'un bénéfice peut être positif ou négatif, ce qui correspond, dans ce deuxième cas, à une perte.

1. Quelles quantités de chaises la société doit-elle produire et vendre pour obtenir un bénéfice mensuel positif?
2. Déterminer le nombre de chaises que la société doit produire et vendre pour obtenir un bénéfice mensuel maximal.

## EXERCICE 3

### [ Centres Étrangers 2015 ]

#### Partie A: Fruit et confiture

1. Représentons la situation par un arbre pondéré:

D'après l'énoncé, nous avons:

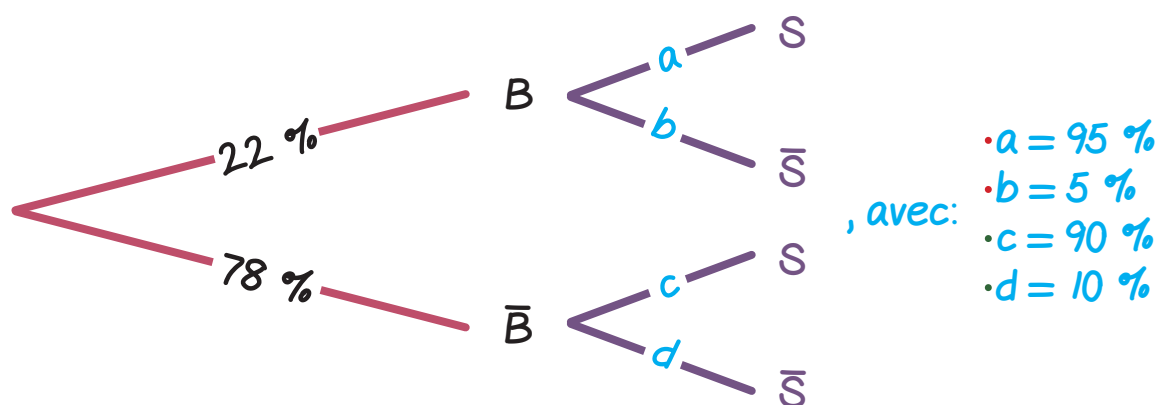
- $B$  = " le fruit, qui est livré, est issu de l'agriculture biologique ".
- $\bar{B}$  = " le fruit, qui est livré, n'est pas issu de l'agriculture biologique ".
- $S$  = " le fruit, qui est livré, est sélectionné pour la préparation des confitures ".
- $\bar{S}$  = " le fruit, qui est livré, n'est pas sélectionné pour la préparation des confitures ".

- $P(B) = 22\%$
- $P(\bar{B}) = 78\%$
- (  $22\% + 78\% = 1$  ).

- $P_B(S) = 95\%$
- $P_B(\bar{S}) = 5\%$
- (  $95\% + 5\% = 1$  ).

- $P_{\bar{B}}(S) = 90\%$
- $P_{\bar{B}}(\bar{S}) = 10\%$
- (  $90\% + 10\% = 1$  ).

D'où l'arbre pondéré suivant:



2. Déterminons la probabilité que le fruit soit sélectionné pour la préparation des confitures et qu'il soit issu de l'agriculture biologique:

Cela revient à calculer:  $P(B \cap S)$ .

$$P(B \cap S) = P_B(S) \times P(B).$$

$$\text{Ainsi: } P(B \cap S) = 95\% \times 22\% \Rightarrow P(B \cap S) = 20.9\%.$$

Au total, il y a 20.9% de chance pour que le fruit soit sélectionné pour la préparation des confitures et qu'il soit issu de l'agriculture biologique.

3. Montrons que  $P(S) = 0.911$ :

$$\text{L'événement } S = (S \cap B) \cup (S \cap \bar{B}).$$

$$\text{D'où: } P(S) = P(S \cap B) + P(S \cap \bar{B})$$

$$= P(B \cap S) + P_{\bar{B}}(S) \times P(\bar{B}).$$

$$\text{Ainsi: } P(S) = 20.9\% + 90\% \times 78\% \Rightarrow P(S) = 0.911.$$



Au total, la probabilité que le fruit soit sélectionné pour la préparation de la confiture est de: 91.1%

4. Sachant que le fruit a été sélectionné, déterminons la probabilité qu'il ne soit pas issu de l'agriculture biologique:

Cela revient à calculer:  $P_S(\bar{B})$ .

$$P_S(\bar{B}) = \frac{P(S \cap \bar{B})}{P(S)}$$

$$\text{Ainsi: } P_S(\bar{B}) = \frac{91.1\% - 20.9\%}{91.1\%} \Rightarrow P_S(\bar{B}) \approx 77.1\%$$

Au total, il y a 77.1% de chance pour que le fruit ait été sélectionné pour les confitures sans être issu de l'agriculture biologique.