

Sujet + Corrigé

ANNALES MATHÉMATIQUES BAC ES
PROBABILITÉS - 2014

SUJET 7
INDE
BAC ES - 2014

**CORRECTION RÉALISÉE
PAR ALAIN PILLER**



Annales Mathématiques Bac 2014
Sujets + Corrigés - Alain Pillier
Inde

Alain PILLER — Sujet 7

Exercice 1

4 points

Commun à tous les candidats

Pour chacune des propositions, déterminer si la proposition est vraie ou fausse et justifier la réponse.

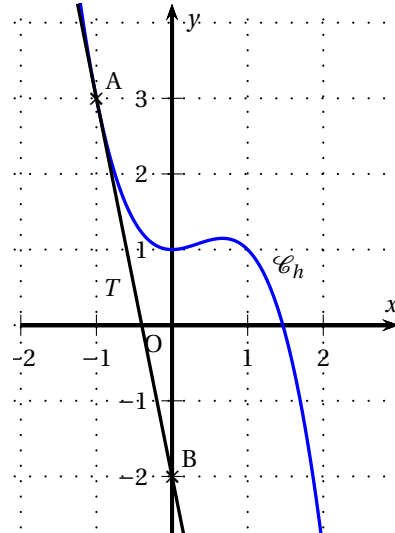
1.

La courbe \mathcal{C}_h représentative d'une fonction h définie et dérivable sur \mathbb{R} est représentée ci-contre.

On a tracé la tangente T à \mathcal{C}_h au point $A(-1; 3)$.

T passe par le point $B(0; -2)$.

Proposition : le nombre dérivé $h'(-1)$ est égal à -2 .



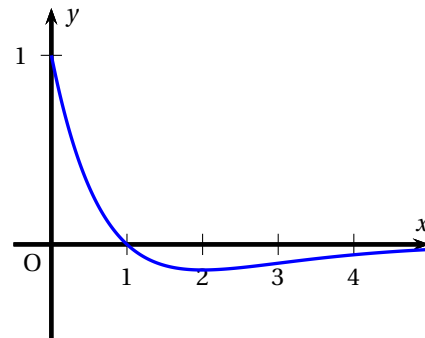
2.

On désigne par f une fonction définie et deux fois dérivable sur $[0; +\infty[$.

La courbe représentative de la fonction f'' , dérivée seconde de la fonction f , est donnée ci-contre.

Le point de coordonnées $(1; 0)$ est le seul point d'intersection de cette courbe et de l'axe des abscisses.

Proposition : la fonction f est convexe sur l'intervalle $[1; 4]$.



3. **Proposition** : on a l'égalité

$$e^{5\ln 2} \times e^{7\ln 4} = 2^{19}.$$

4. La courbe représentative d'une fonction g définie et continue sur l'intervalle $[0; 2]$ est donnée en fig. 1.

La courbe représentative d'une de ses primitives, G , est donnée sur la fig. 2. La courbe représentative de G passe par les points $A(0; 1)$, $B(1; 1)$ et $C(2; 5)$.

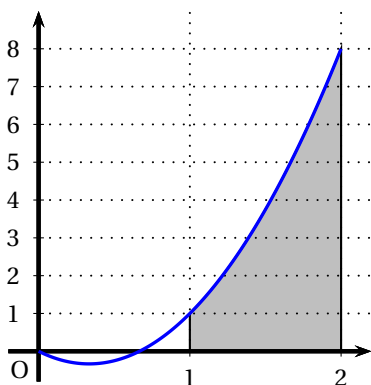


fig. 1

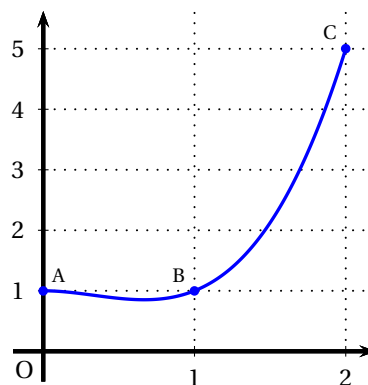


fig. 2

Proposition : la valeur exacte de l'aire de la partie grisée sous la courbe de g en fig. 1 est 4 unités d'aires.

Exercice 2

5 points

Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats L

Une association décide d'ouvrir un centre de soin pour les oiseaux sauvages victimes de la pollution. Leur but est de soigner puis relâcher ces oiseaux une fois guéris.

Le centre ouvre ses portes le 1^{er} janvier 2013 avec 115 oiseaux.

Les spécialistes prévoient que 40 % des oiseaux présents dans le centre au 1^{er} janvier d'une année restent présents le 1^{er} janvier suivant et que 120 oiseaux nouveaux sont accueillis dans le centre chaque année.

On s'intéresse au nombre d'oiseaux présents dans le centre au 1^{er} janvier des années suivantes.

La situation peut être modélisée par une suite (u_n) admettant pour premier terme $u_0 = 115$, le terme u_n donnant une estimation du nombre d'oiseaux l'année 2013 + n .

1. Calculer u_1 et u_2 . Avec quelle précision convient-il de donner ces résultats ?
2. Les spécialistes déterminent le nombre d'oiseaux présents dans le centre au 1^{er} janvier de chaque année à l'aide d'un algorithme.
 - a. Parmi les trois algorithmes proposés ci-dessous, seul l'**algorithme 3** permet d'estimer le nombre d'oiseaux présents au 1^{er} janvier de l'année 2013 + n .

Expliquer pourquoi les deux premiers algorithmes ne donnent pas le résultat attendu.

Variables :
 U est un nombre réel
 i et N sont des nombres entiers
Début
 Saisir une valeur pour N
 Affecter 115 à U
 Pour i de 1 à N faire
 | Affecter $0,6 \times U + 120$ à U
 Fin Pour
 Afficher U
 Fin

algorithme 1

Variables :
 U est un nombre réel
 i et N sont des nombres entiers
Début
 Saisir une valeur pour N
 Pour i de 1 à N faire
 | Affecter 115 à U
 | Affecter $0,4 \times U + 115$ à U
 Fin Pour
 Afficher U
 Fin

algorithme 2

Variables :
 U est un nombre réel
 i et N sont des nombres entiers
Début
 Saisir une valeur pour N
 Affecter 115 à U
 Pour i de 1 à N faire
 | Affecter $0,4 \times U + 120$ à U
 Fin Pour
 Afficher U
 Fin

algorithme 3

- b. Donner, pour tout entier naturel n , l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n .
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 200$.
 - a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,4. Préciser v_0 .
 - b. Exprimer, pour tout entier naturel n , v_n en fonction de n .
 - c. En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = 200 - 85 \times 0,4^n$.
 - d. La capacité d'accueil du centre est de 200 oiseaux. Est-ce suffisant ? Justifier la réponse.

4. Chaque année, le centre touche une subvention de 20 euros par oiseau présent au 1^{er} janvier. Calculer le montant total des subventions perçues par le centre entre le 1^{er} janvier 2013 et le 31 décembre 2018 si l'on suppose que l'évolution du nombre d'oiseaux se poursuit selon les mêmes modalités durant cette période.

Exercice 2

5 points

Candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes

Deux sociétés, Ultra-eau (U) et Vital-eau (V), se partagent le marché des fontaines d'eau à bonbonnes dans les entreprises d'une grande ville.

Partie A

En 2013, l'entreprise U avait 45 % du marché et l'entreprise V le reste. Chaque année, l'entreprise U conserve 90 % de ses clients, les autres choisissent l'entreprise V. Quant à l'entreprise V, elle conserve 85 % de ses clients, les autres choisissent l'entreprise U.

On choisit un client au hasard tous les ans et on note pour tout entier naturel n :

u_n la probabilité qu'il soit un client de l'entreprise U l'année 2013 + n , ainsi

$$u_0 = 0,45;$$

v_n la probabilité qu'il soit un client de l'entreprise V l'année 2013 + n .

- Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets U et V.
- Donner v_0 , calculer u_1 et v_1 .
- On considère l'algorithme (incomplet) donné en annexe. Celui-ci doit donner en sortie les valeurs de u_n et v_n pour un entier naturel n saisi en entrée.
Compléter les lignes (L5) et (L8) de l'algorithme pour obtenir le résultat attendu.
- On admet que, pour tout nombre entier naturel n , $u_{n+1} = 0,75u_n + 0,15$. On note, pour tout nombre entier naturel n , $w_n = u_n - 0,6$.
 - Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison 0,75.
 - Quelle est la limite de la suite (w_n) ? En déduire la limite de la suite (u_n) . Interpréter le résultat dans le contexte de cet exercice.

Partie B

L'entreprise U fournit ses clients en recharges pour les fontaines à eau et dispose des résultats antérieurs suivants :

Nombre de recharges en milliers	1	3	5
Coût total annuel de production en centaines d'euros	11	27,4	83

Le coût total de production est modélisé par une fonction C définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0; 10]$ par :

$$C(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 10 \quad a, b \text{ et } c \text{ sont des nombres réels.}$$

Lorsque le nombre x désigne le nombre de milliers de recharges produites, $C(x)$ est le coût total de production en centaines d'euros.

On admet que le triplet (a, b, c) est solution du système (S).

$$(S) \begin{cases} a + b + c & = 1 \\ 27a + 9b + 3c & = 17,4 \\ 125a + 25b + 5c & = 73 \end{cases} \text{ et on pose } X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

- a. Écrire ce système sous la forme $MX = Y$ où M et Y sont des matrices que l'on précisera.

- b. On admet que la matrice M est inversible. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le triplet (a, b, c) solution du système (S).
2. En utilisant cette modélisation, quel serait le coût total annuel de production pour 8 000 recharges d'eau produites ?

Annexe à l'exercice 2

Recopier sur la copie la partie « traitement » (lignes L3 à L9) en complétant les lignes L5 et L8.

Variables :	N est un nombre entier naturel non nul	L1
	U et V sont des nombres réels	L2
Traitement :	Saisir une valeur pour N	L3
	Affecter à U la valeur 0,45	L4
	Affecter à V la valeur	L5
	Pour i allant de 1 jusqu'à N	L6
	Affecter à U la valeur $0,9 \times U + 0,15 \times V$	L7
	Affecter à V la valeur	L8
	Fin Pour	L9
Sortie :	Afficher U et Afficher V	L10

Sujet Mathématiques Bac 2014
probabilités ES - corrigé

Exercice 3

5 points

Commun à tous les candidats

Les parties A, B et C sont indépendantes

Partie A

Une société s'est intéressée à la probabilité qu'un de ses salariés, choisi au hasard, soit absent durant une semaine donnée de l'hiver 2014.

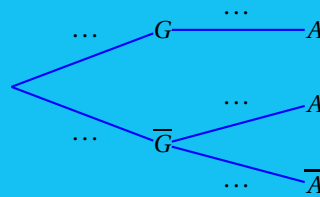
On a évalué à 0,07 la probabilité qu'un salarié ait la grippe une semaine donnée. Si le salarié a la grippe, il est alors absent.

Si le salarié n'est pas grippé cette semaine là, la probabilité qu'il soit absent est estimée à 0,04.

On choisit un salarié de la société au hasard et on considère les évènements suivants :

- G : le salarié a la grippe une semaine donnée ;
- A : le salarié est absent une semaine donnée.

1. Reproduire et compléter l'arbre en indiquant les probabilités de chacune des branches.



2. Montrer que la probabilité $p(A)$ de l'évènement A est égale à 0,1072.
3. Pour une semaine donnée, calculer la probabilité qu'un salarié ait la grippe sachant qu'il est absent. Donner un résultat arrondi au millièème.

Partie B

On admet que le nombre de journées d'absence annuel d'un salarié peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 14$ et d'écart type $\sigma = 3,5$.

1. Justifier, en utilisant un résultat du cours, que $p(7 \leq X \leq 21) \approx 0,95$.
2. Calculer la probabilité, arrondie au millièème, qu'un salarié comptabilise au moins 10 journées d'absence dans l'année.

Partie C

Une mutuelle déclare que 22 % de ses adhérents ont dépassé 20 journées d'absence au travail en 2013. Afin d'observer la validité de cette affirmation, un organisme enquête sur un échantillon de 200 personnes, choisies au hasard et de façon indépendante, parmi les adhérents de la mutuelle. Parmi celles-ci, 28 ont comptabilisé plus de 20 journées d'absence en 2013. Le résultat de l'enquête remet-il en question l'affirmation de la mutuelle? Justifier la réponse. On pourra s'aider du calcul d'un intervalle de fluctuation.

Exercice 4

6 points

Commun à tous les candidats

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Un artisan glacier commercialise des « sorbets bio ». Il peut en produire entre 0 et 300 litres par semaine. Cette production est vendue dans sa totalité. Le coût total de fabrication est modélisé par la fonction f définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $I =]0 ; 3]$ par

$$f(x) = 10x^2 - 20x \ln x.$$

Lorsque x représente le nombre de centaines de litres de sorbet, $f(x)$ est le coût total de fabrication en centaines d'euros.

La recette, en centaines d'euros, est donnée par une fonction r définie sur le même intervalle I .

Partie A

La courbe \mathcal{C} représentative de la fonction f et la droite D représentative de la fonction linéaire r sont données en **annexe**.

1. Répondre aux questions suivantes par lecture graphique et sans justification.
 - a. Donner le prix de vente en euros de 100 litres de sorbet.
 - b. Donner l'expression de $r(x)$ en fonction de x .
 - c. Combien l'artisan doit-il produire au minimum de litres de sorbet pour que l'entreprise dégage un bénéfice?
2. On admet que $\int_1^3 20x \ln x \, dx = 90 \ln 3 - 40$.
 - a. En déduire la valeur de $\int_1^3 f(x) \, dx$.
 - b. En déduire, pour une production comprise entre 100 et 300 litres, la valeur moyenne (arrondie à l'euro) du coût total de production.

Partie B

On note $B(x)$ le bénéfice réalisé par l'artisan pour la vente de x centaines de litres de sorbet produits. D'après les données précédentes, pour tout x de l'intervalle $[1 ; 3]$, on a :

$$B(x) = -10x^2 + 10x + 20x \ln x$$

où $B(x)$ est exprimé en centaines d'euros.

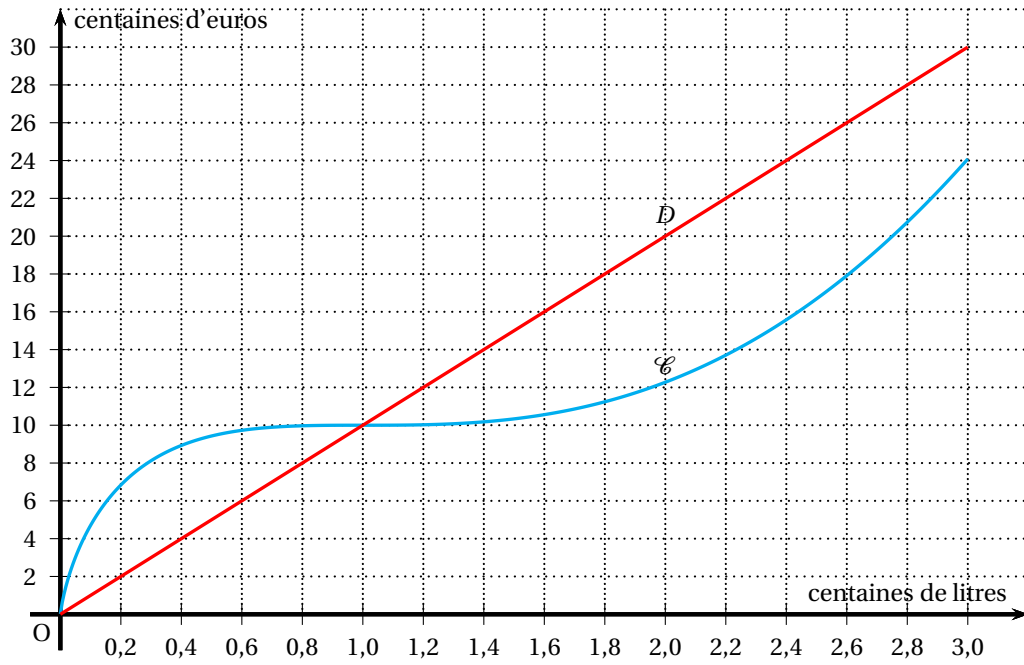
1. On note B' la fonction dérivée de la fonction B . Montrer que, pour tout nombre x de l'intervalle $[1 ; 3]$, on a : $B'(x) = -20x + 20 \ln x + 30$.
2. On donne le tableau de variation de la fonction dérivée B' sur l'intervalle $[1 ; 3]$.

x	1	3
$B'(x)$	$B'(1)$	$B'(3)$

- a. Montrer que l'équation $B'(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1 ; 3]$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} .
 - b. En déduire le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[1 ; 3]$ puis dresser le tableau de variation de la fonction B sur ce même intervalle.
3. L'artisan a décidé de maintenir sa production dans les mêmes conditions s'il peut atteindre un bénéfice d'au moins 850 euros. Est-ce envisageable ?

ANNEXE

Annexe à l'exercice 4



EXERCICE 3

[Inde 2014]

Partie A: Grippe et absent

1. Complétons l'arbre pondéré:

D'après l'énoncé, nous avons:

- G = " le salarié a la grippe une semaine donnée ".
- \bar{G} = " le salarié n'a pas la grippe une semaine donnée ".
- A = " le salarié est absent une semaine donnée ".
- \bar{A} = " le salarié est présent une semaine donnée ".

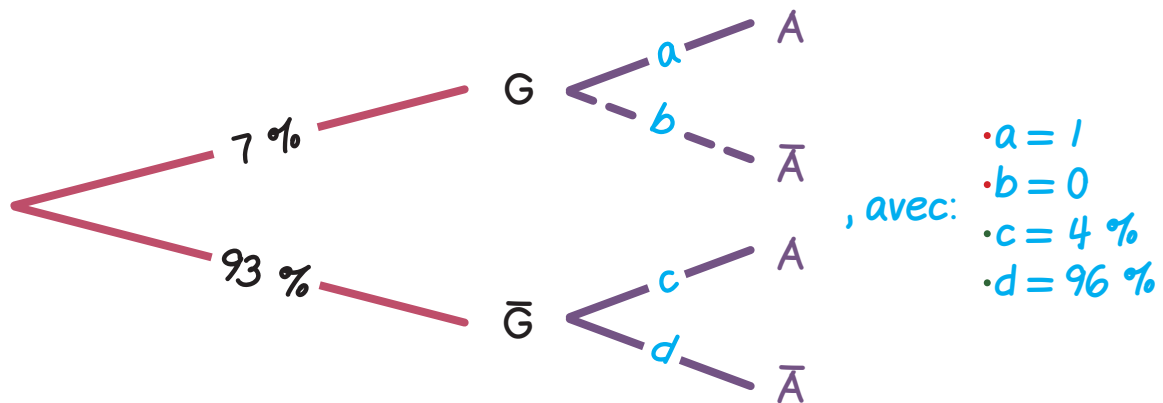
- $P(G) = 7\%$
- $P(\bar{G}) = 93\%$
($7\% + 93\% = 1$).

- $P_{\bar{G}}(A) = 4\%$
- $P_{\bar{G}}(\bar{A}) = 96\%$
($4\% + 96\% = 1$).

- $P_G(A) = 1$
- $P_G(\bar{A}) = 0$
($1 + 0 = 1$).

Nous pouvons représenter cette situation par un arbre pondéré.

D'où l'arbre pondéré suivant:



2. Montrons que $P(A) = 0.1072$:

L'événement $A = (A \cap G) \cup (A \cap \bar{G})$.

D'où: $P(A) = P(A \cap G) + P(A \cap \bar{G})$

$$= P_G(A) \times P(G) + P_{\bar{G}}(A) \times P(\bar{G}).$$

Ainsi: $P(A) = 1 \times 7\% + 4\% \times 93\% \Rightarrow P(A) = 0.1072$.

Au total, la probabilité qu'un salarié soit absent est de: 10.72%.

3. Calculons la probabilité qu'un salarié ait la grippe sachant qu'il est absent:

Cela revient à calculer: $P_A(G)$.

$$P_A(G) = \frac{P(A \cap G)}{P(A)} \Leftrightarrow P_A(G) = \frac{P(G \cap A)}{P(A)}$$

$$\Rightarrow P_A(G) = \frac{P_G(A) \times P(G)}{P(A)}$$

$$\text{Ainsi: } P_A(G) = \frac{1 \times 7\%}{10.72\%} \Rightarrow P_A(G) \approx 65.3\%.$$

Au total, la probabilité qu'un salarié soit grippé, sachant qu'il est absent, est de: 65.3%.