

Sujet + Corrigé

ANNALES MATHÉMATIQUES BAC ES
PROBABILITÉS - 2014

SUJET 5
LIBAN
BAC ES - 2014

**CORRECTION RÉALISÉE
PAR ALAIN PILLER**



Annales Mathématiques Bac 2014
Sujets + Corrigés - Alain Pillier
Liban

Alain PILLER — Sujet 5

Sujet Mathématiques Bac 2014
 probabilités ES - corrigé

Exercice 1**5 points****Commun à tous les candidats**

Un serveur, travaillant dans une pizzeria, remarque qu'en moyenne, 40 % des clients sont des familles, 25 % des clients sont des personnes seules et 35 % des clients sont des couples.

Il note aussi que :

- 70 % des familles laissent un pourboire ;
- 90 % des personnes seules laissent un pourboire ;
- 40 % des couples laissent un pourboire.

Un soir donné, ce serveur prend au hasard une table occupée dans la pizzeria.

On s'intéresse aux évènements suivants :

F : « la table est occupée par une famille »

S : « la table est occupée par une personne seule »

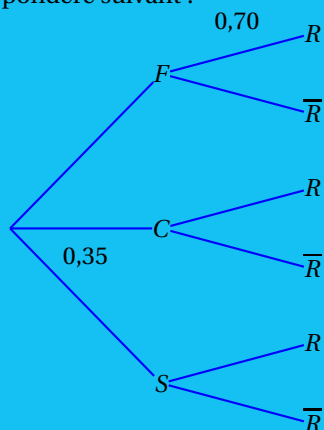
C : « la table est occupée par un couple »

R : « le serveur reçoit un pourboire »

On note \bar{A} l'évènement contraire de A et $p_B(A)$ la probabilité de A , sachant B .

Partie A

1. D'après les données de l'énoncé, préciser les probabilités $p(F)$ et $p_S(R)$.
2. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



3. a. Calculer $p(F \cap R)$.
 b. Déterminer $p(R)$.
4. Sachant que le serveur a reçu un pourboire, calculer la probabilité que ce pourboire vienne d'un couple. Le résultat sera arrondi à 10^{-3} .

Partie B

On note X la variable aléatoire qui, à un soir donné, associe le montant total en euro des pourboires obtenus par le serveur.

On admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 15$ et d'écart-type $\sigma = 4,5$.

Dans les questions suivantes, les calculs seront effectués à la calculatrice et les résultats arrondis à 10^{-2} .

1. Calculer :
 - a. la probabilité que le montant total des pourboires reçus par le serveur soit compris entre 6 et 24 euros.
 - b. $p(X \geq 20)$.
2. Calculer la probabilité que le montant total des pourboires du serveur soit supérieur à 20 euros sachant que ce montant est compris entre 6 et 24 euros.

Sujet Mathématiques Bac 2014
probabilités ES - corrigé

EXERCICE 2

4 points

Enseignement obligatoire et L

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Chaque question ci-après comporte quatre propositions de réponse.

Pour chacune de ces questions, une seule des réponses proposées est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. On ne demande pas de justification.

Chaque réponse exacte rapportera 1 point, une réponse fautive ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève de point.

Un fumeur est dit fumeur régulier s'il fume au moins une cigarette par jour.

En 2010, en France, la proportion notée p de fumeurs réguliers, âgés de 15 à 19 ans, était de 0,236

(Source : Inpes)

On a $p = 0,236$.

1. La probabilité que, sur un groupe de 10 jeunes âgés de 15 à 19 ans choisis au hasard et de manière indépendante, aucun ne soit fumeur régulier est, à 10^{-3} près :

a. 0,136 b. 0 c. 0,068 d. 0,764

2. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 0,95 de la fréquence de fumeurs réguliers dans un échantillon de 500 jeunes âgés de 15 à 19 ans est :

(Les bornes de chaque intervalle sont données à 10^{-3} près)

a. [0,198 ; 0,274] b. [0,134 ; 0,238] c. [0,191 ; 0,281] d. [0,192 ; 0,280]

3. La taille n de l'échantillon choisi afin que l'amplitude de l'intervalle de fluctuation au seuil de 0,95 soit inférieure à 0,01, vaut :

a. $n = 200$ b. $n = 400$ c. $n = 21\,167$ d. $n = 27\,707$

4. Dans un échantillon de 250 jeunes fumeurs réguliers, âgés de 15 à 19 ans, 99 sont des filles. Au seuil de 95 %, un intervalle de confiance de la proportion de filles parmi les fumeurs réguliers âgés de 15 à 19 ans est :

(Les bornes de chaque intervalle sont données à 10^{-2} près)

a. [0,35 ; 0,45] b. [0,33 ; 0,46] c. [0,39 ; 0,40] d. [0,30 ; 0,50]

EXERCICE 3

5 points

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

La médiathèque d'une petite ville a ouvert ses portes le 2 janvier 2013 et a enregistré 2 500 inscriptions en 2013.

Elle estime que, chaque année, 80 % des anciens inscrits renouvelleront leur inscription l'année suivante et qu'il y aura 400 nouveaux adhérents.

On modélise cette situation par une suite numérique (a_n) .

On note $a_0 = 2500$ le nombre d'inscrits à la médiathèque en 2013 et a_n représente le nombre d'inscrits à la médiathèque pendant l'année 2013 + n .

1. **a.** Calculer a_1 et a_2 .
- b.** Justifier que, pour tout entier naturel n , on a la relation $a_{n+1} = 0,8 \times a_n + 400$.
2. On pose, pour tout entier naturel n , $v_n = a_n - 2000$.
 - a.** Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 500$ et de raison $q = 0,8$.
 - b.** En déduire que le terme général de la suite (a_n) est $a_n = 500 \times 0,8^n + 2000$.
 - c.** Calculer la limite de la suite (a_n) .
 - d.** Que peut-on en déduire pour le nombre d'adhérents à la médiathèque si le schéma d'inscription reste le même au cours des années à venir ?
3. On propose l'algorithme suivant :

Variables :	N entier A réel
Initialisation :	N prend la valeur 0 A prend la valeur 2 500
Traitement :	Tant que $A - 2000 > 50$ A prend la valeur $A \times 0,8 + 400$ N prend la valeur $N + 1$ Fin du Tant que
Sortie :	Afficher N .

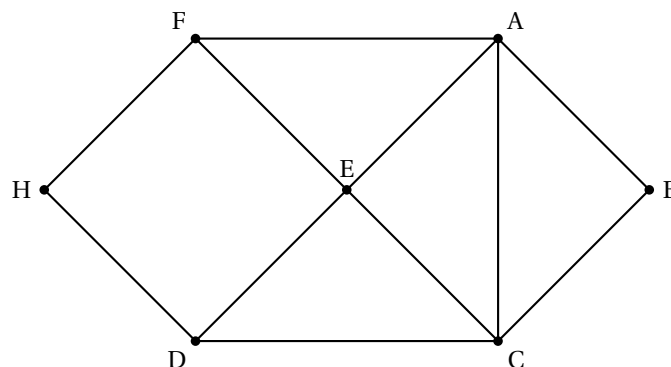
- a.** Expliquer ce que permet de calculer cet algorithme.
- b.** À l'aide de la calculatrice, déterminer le résultat obtenu grâce à cet algorithme et interpréter la réponse dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 3

5 points

ES Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On a schématisé ci-dessous le plan d'une MJC (Maison de la Jeunesse et de la Culture) par un graphe dont les sommets sont les salles et les arêtes sont les passages (portes, couloirs ou escaliers) entre les salles. On appelle H le hall d'entrée et B le bureau du directeur.



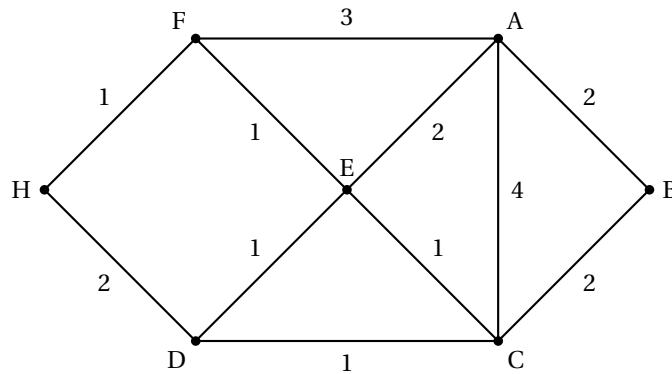
En fin de journée, un agent de service fait le tour de la MJC pour récupérer dans chaque salle (bureau du directeur et hall inclus) les objets oubliés par les enfants.

1. Préciser si ce graphe est connexe en justifiant la réponse.
2. Déterminer, en justifiant, si l'agent de service peut passer par toutes les salles en utilisant une fois et une seule chaque passage.
3. On range les sommets par ordre alphabétique.
Donner la matrice d'adjacence M associée au graphe.
4. On donne :

$$M^4 = \begin{pmatrix} 31 & 15 & 26 & 21 & 27 & 18 & 12 \\ 15 & 12 & 15 & 12 & 18 & 12 & 6 \\ 26 & 15 & 31 & 18 & 27 & 21 & 12 \\ 21 & 12 & 18 & 20 & 17 & 18 & 5 \\ 27 & 18 & 27 & 17 & 34 & 17 & 16 \\ 18 & 12 & 21 & 18 & 17 & 20 & 5 \\ 12 & 6 & 12 & 5 & 16 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

En déduire le nombre de chemins de longueur 4 entre les sommets B et H.

5. On a indiqué sur le graphe ci-dessous le temps en minute mis pour passer entre les différentes salles en ouvrant et fermant les portes à clé.



EXERCICE 4

6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 5]$ par

$$f(x) = x + 1 + e^{-x+0,5}.$$

On a représenté en annexe, dans un plan muni d'un repère orthonormé :

- la courbe \mathcal{C} représentative de la fonction f ;
- la droite Δ d'équation $y = 1,5x$.

1. a. Vérifier que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; 5]$, on a $f'(x) = 1 - e^{-x+0,5}$ où f' désigne la fonction dérivée de f .
b. Résoudre dans l'intervalle $[0; 5]$ l'équation $f'(x) = 0$.
c. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0; 5]$.
d. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 5]$.

2. On note α l'abscisse du point d'intersection de \mathcal{C} et Δ .
 - a. Donner, par lecture graphique, un encadrement de α à 0,5 près.
 - b. Résoudre graphiquement sur l'intervalle $[0; 5]$ l'inéquation $f(x) < 1,5x$.

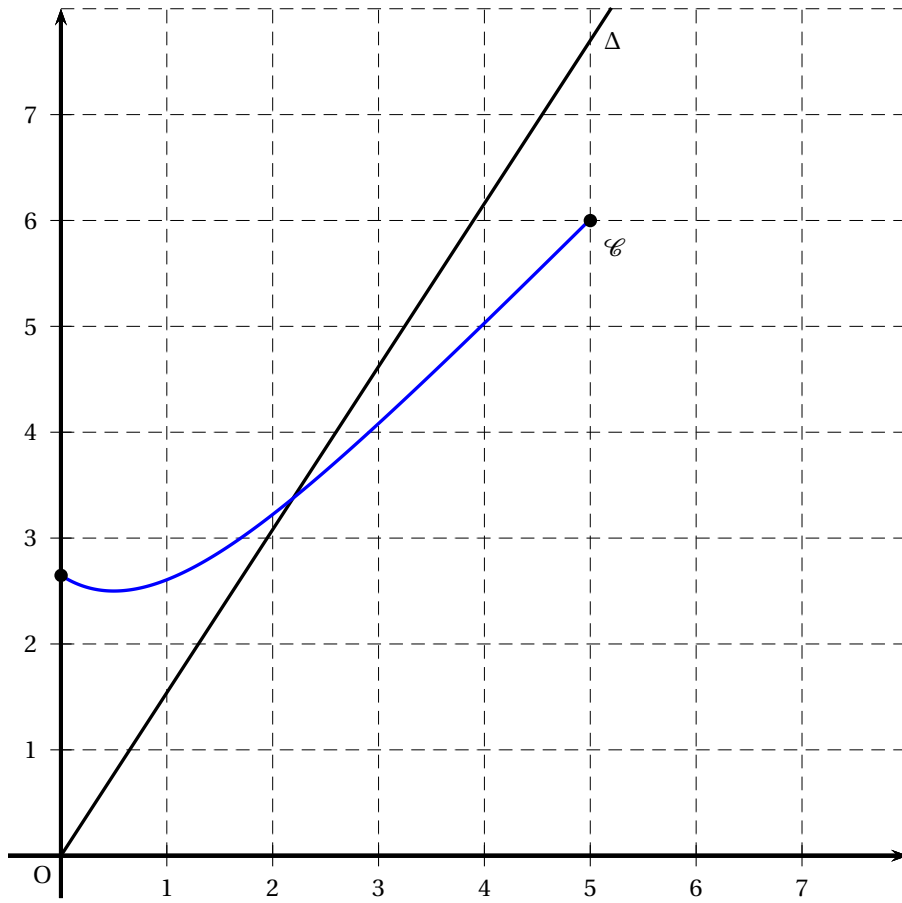
Partie B Application

Une entreprise fabrique des cartes à puces électroniques à l'aide d'une machine. La fonction f , définie dans la partie A, représente le coût d'utilisation de la machine en fonction de la quantité x de cartes produites, lorsque x est exprimé en centaines de cartes et $f(x)$ en centaines d'euros.

1.
 - a. Déduire de la partie A, le nombre de cartes à produire pour avoir un coût minimal d'utilisation de la machine.
 - b. Chaque carte fabriquée par la machine est vendue 1,50 €. La recette perçue pour la vente de x centaines de cartes vaut donc $1,5x$ centaines d'euros. Vérifier que le bénéfice obtenu, en centaines d'euros, par la vente de x centaines de cartes est donné par $B(x) = 0,5x - 1 - e^{-x+0,5}$.
2.
 - a. Montrer que la fonction B est strictement croissante sur l'intervalle $[0; 5]$.
 - b. Montrer que, sur l'intervalle $[0; 5]$, l'équation $B(x) = 0$ admet une unique solution comprise entre 2,32 et 2,33.
3. On dira que l'entreprise réalise un bénéfice lorsque $B(x) > 0$.
Indiquer la quantité minimale qui doit figurer sur le carnet de commandes de l'entreprise pour que celle-ci puisse réaliser un bénéfice.

ANNEXE

EXERCICE 4



EXERCICE 1

[Liban 2014]

Partie A: Serveur et pourboire

1. Précisons $P(F)$ et $P_S(R)$:

D'après l'énoncé, nous avons:

- F = " la table est occupée par une famille ".
- S = " la table est occupée par une personne seule ".
- C = " la table est occupée par un couple ".
- R = " le serveur reçoit un pourboire ".
- \bar{R} = " le serveur ne reçoit pas de pourboire ".

- $P(F) = 40\%$
- $P(S) = 25\%$
- $P(C) = 35\%$
($40\% + 25\% + 35\% = 1$).

- $P_F(R) = 70\%$
- $P_F(\bar{R}) = 30\%$
($70\% + 30\% = 1$).

- $P_S(R) = 90\%$
- $P_S(\bar{R}) = 10\%$
($90\% + 10\% = 1$).

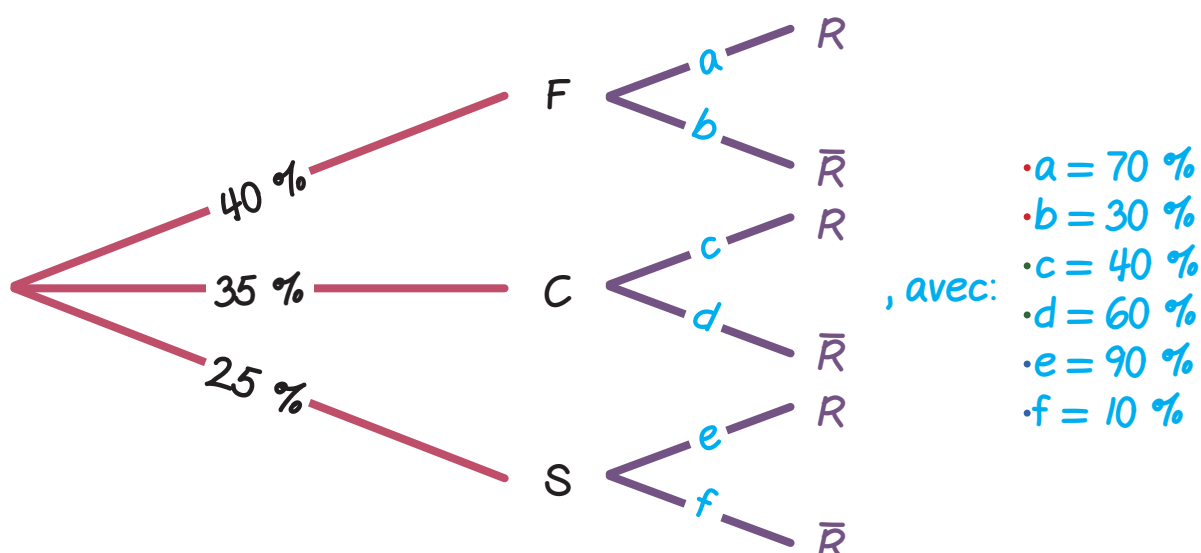
- $P_C(R) = 40\%$
- $P_C(\bar{R}) = 60\%$
($40\% + 60\% = 1$).

Au total, nous avons donc:

$$P(F) = 40\% \text{ et } P_S(R) = 90\%.$$

2. Représentation de l'arbre pondéré:

Nous avons l'arbre pondéré suivant:



3. a. Calculons $P(F \cap R)$:

$$P(F \cap R) = P_F(R) \times P(F).$$

$$\text{Ainsi: } P(F \cap R) = 70\% \times 40\% \Rightarrow P(F \cap R) = 28\%.$$

Au total, il y a 28% de chance pour que ce soit une famille et qu'elle laisse un pourboire au serveur.

3. b. Déterminons $P(R)$:

$$\text{L'événement } R = (R \cap F) \cup (R \cap C) \cup (R \cap S).$$

$$\text{D'où: } P(R) = P(R \cap F) + P(R \cap C) + P(R \cap S)$$

$$= P_F(R) \times P(F) + P_C(R) \times P(C) + P_S(R) \times P(S).$$

$$\text{Ainsi: } P(R) = 70\% \times 40\% + 40\% \times 35\% + 90\% \times 25\%$$

$$\Rightarrow P(R) = 64.5\%.$$

Au total, il y a 64.5% de chance pour que le client laisse un pourboire.

4. Sachant que le serveur a reçu un pourboire, calculons la probabilité que ce pourboire vienne d'un couple:

Cela revient à calculer: $P_R(C)$.

$$P_R(C) = \frac{P(R \cap C)}{P(R)} \Leftrightarrow P_R(C) = \frac{P(C \cap R)}{P(R)}$$

$$\Leftrightarrow P_R(C) = \frac{P_C(R) \times P(C)}{P(R)}.$$

$$\text{Ainsi: } P_R(C) = \frac{40\% \times 35\%}{64.5\%} \Rightarrow P_R(C) \approx 0.217 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

Au total, la probabilité demandée est: 0.217 à 10^{-3} près.

EXERCICE 2

[Liban 2014]

1. Déterminons la probabilité demandée:

Ici nous devons calculer: $P(X = 0)$ avec: $X \rightsquigarrow B(10; 23.6\%)$.

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $P(X = 0) \approx 0.068$.

Au total, la bonne réponse est: (c) "0.068".