Sujet + Corrigé

ANNALES MATHÉMATIQUES BAC ES

PROBABILITÉS - 2014

SUJET 3
ANTILLES - GUYANE
BAC ES - 2014

CORRECTION RÉALISÉE PAR ALAIN PILLER

alainpiller.fr

Annales Mathématiques Bac 2014
Sujets + Corrigés - Alain Piller
Antilles - Guyane

Alain PILLER — Sujet 3

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie

1. La somme $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{30}$ est égale à :
   a. $-1 + 2^{31}$
   b. $1 - 2^{31}$
   c. $-1 + 2^{30}$
   d. $1 - 2^{30}$
2. L'équation $-\dfrac{x^3}{3} + x^2 + 3x = 0$ admet sur $\mathbb{R}$:
   a. la solution -2
   b. trois solutions distinctes
   c. aucune solution
   d. une unique solution
3. Soit la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \ln x$.
   Une primitive de f est la fonction F définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :
   a. $F(x) = \dfrac{1}{x}$
   b. $F(x) = x\ln x$
   c. $F(x) = x\ln x - x$
   d. $F(x) = \mathrm{e}^x$
4. Les nombres entiers n solutions de l'inéquation $\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0,003$ sont tous les nombres entiers n tels que :
   a. $n \geqslant 8$
   b. $n \geqslant 9$
   c. $n \leqslant 8$
   d. $n \leqslant 9$

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats L

Un opérateur de téléphonie mobile constate que, chaque année, il perd 8 % de ses précédent abonnés et que, par ailleurs, il gagne 3 millions de nouveaux abonnés.
En 2013 le nombre d'abonnés est de 20 millions.
On s'intéresse au nombre d'abonnés, en millions, pour l'année $2013 + n$. En supposant que cette évolution se poursuit de la même façon, la situation peut être modélisée par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 20 \\ u_{n+1} & = & 0,92u_n + 3. \end{cases}$$

Le terme u_n donne une estimation du nombre d'abonnés pour l'année $2013 + n$.

Partie A

1. **a.** En utilisant cette modélisation, l'opérateur décide d'arrondir les résultats à 10^{-3}.
   À quoi correspond ce choix d'arrondi ?

   b. Déterminer le nombre d'abonnés en 2014 et en 2015.
   On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 37,5$ pour tout entier naturel n.
2. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,92. Préciser son premier terme.
3. Exprimer v_n en fonction de n.
   En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = -17,5 \times 0,92^n + 37,5$.
4. Déterminer le nombre d'abonnés en millions en 2020. Arrondir les résultats à 10^{-3}.
5. Déterminer la limite de la suite (u_n).
6. L'opérateur peut-il espérer dépasser 30 millions d'abonnés ?

Partie B

Compte tenu des investissements, l'opérateur considère qu'il réalisera des bénéfices lorsque le nombre d'abonnés dépassera 25 millions.

1. Recopier et compléter l'algorithme suivant afin de déterminer le nombre d'années nécessaires à partir de 2013 pour que l'opérateur fasse des bénéfices.

Variables :	N un nombre entier naturel non nul
	U un nombre réel
Traitement :	Affecter à U la valeur 20
	Affecter à N la valeur 0
	Tant que ....
	affecter à U la valeur $0,92 \times U + 3$
	affecter à N la valeur $N + 1$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher ....

2. En quelle année l'opérateur fera-t-il des bénéfices pour la première fois ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les services commerciaux d'une grande surface de produits alimentaires ont défini un profil de client qui a été appelé « consommateur bio ».

Sur la base d'observations réalisées les années précédentes, il a été constaté que :

90 % des clients « consommateur bio » maintenaient cette pratique l'année suivante ;

15 % des clients n'ayant pas le profil de « consommateur bio » entraient dans la catégorie « consommateur bio » l'année suivante.

On suppose que cette évolution se poursuit d'une année à l'autre à partir de 2013, année au cours de laquelle il a été constaté que 20 % des clients ont le profil « consommateur bio ».
Par un tirage aléatoire effectué tous les ans, on choisit un client de cette grande surface.
Pour tout nombre entier naturel n on note :

b_n, la probabilité que le client choisi lors de l'année 2013 + n soit un « consommateur bio » ;

c_n, la probabilité que le client choisi lors de l'année $2013 + n$ ne soit pas un « consommateur bio » ;

P_n, la matrice ligne $(b_n \ c_n)$ donnant l'état probabiliste lors de l'année $2013+n$.

1. **a.** Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets B et C où B correspond à l'état « consommateur bio ».

   b. Donner P_0 l'état probabiliste en 2013 et la matrice M de transition correspondant à ce graphe, les sommets B et C étant classés dans cet ordre.

   c. On donne la matrice M^2 :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0,825 & 0,175 \\ 0,2625 & 0,7375 \end{pmatrix}.$$

   En précisant la méthode de calcul, déterminer la probabilité que le client choisi en 2015 soit un « consommateur bio ».

   d. Déterminer l'état stable $(b \ c)$ du graphe probabiliste.

2. Le directeur du supermarché affirme que, dans un futur proche, plus de la moitié de sa clientèle aura le profil de « consommateur bio ».

   a. Recopier et compléter l'algorithme suivant qui doit permettre de déterminer le nombre minimal d'années pour que l'affirmation du directeur soit vérifiée.

```
Variables :     N un nombre entier naturel non nul
                B un nombre réel
Traitement :    Affecter à N la valeur 0
                Affecter à B la valeur 0,2
                Affecter à C la valeur 0,8
                Tant que ...
                  | affecter à B la valeur 0,9 × B + 0,15 × C
                  | affecter à C la valeur 1 − B
                  | affecter à N la valeur N + 1
                Fin Tant que
Sortie :        Afficher ...
```

   b. Déterminer le nombre minimal d'années recherché en expliquant la démarche.

Exercice 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

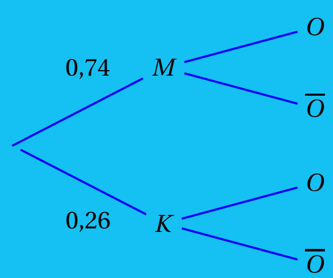
D'après une étude récente il y a 216 762 médecins en France métropolitaine parmi lesquels 0,6 % pratiquent l'ostéopathie et on compte 75 164 kinésithérapeutes parmi lesquels 8,6 % pratiquent l'ostéopathie,

Partie A

On choisit une personne au hasard parmi les médecins et les kinésithérapeutes.
On note les évènements suivants :

— M : « la personne choisie est médecin » ;
— K : « la personne choisie est kinésithérapeute » ;
— O : « la personne choisie pratique l'ostéopathie ».

On représente la situation à l'aide de l'arbre pondéré suivant :



1. Reproduire l'arbre de probabilité puis le compléter.
2. Montrer que la probabilité $P(O)$ de l'évènement O est égale à 0,026 8.
3. Un patient vient de suivre une séance d'ostéopathie chez un praticien d'une des deux catégories. Déterminer la probabilité que le praticien soit un kinésithérapeute. Donner le résultat arrondi au centième.

Partie B

On note T la variable aléatoire associant à chaque patient la durée de visite, en minutes, chez un médecin-ostéopathe. On admet que T suit la loi normale d'espérance 30 et d'écart-type 10.
Dans cette partie, les résultats seront arrondis au centième.

1. Déterminer la probabilité $P(20 \leqslant T \leqslant 40)$.
2. Déterminer la probabilité qu'une visite dure plus de trois quart d'heure.

Partie C

On rappelle qu'en France métropolitaine 0,6 % des médecins pratiquent l'ostéopathie. Une région compte 47 000 médecins dont 164 médecins-ostéopathes.
On note I l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de médecins ostéopathes de la région.

1. **a.** Vérifier que les conditions d'utilisation de cet intervalle sont remplies.

   b. Justifier que $I = [0,0053\ ;\ 0,0067]$, les bornes ayant été arrondies à 10^{-4} près.
   Peut-on considérer que pour la pratique de l'ostéopathie par les médecins, cette région est représentative, privilégiée ou défavorisée par rapport à la situation en France métropolitaine ? Justifier la réponse.

EXERCICE 4 **6 points**
Commun à tous les candidats

Une entreprise fabrique et vend aux écoles primaires des lots constitués de cahiers et de stylos.

Partie A

L'entreprise possède une machine qui peut fabriquer au maximum 1 500 lots par semaine. Le coût total de fabrication hebdomadaire est modélisé par la fonction g définie sur $[0\,;15]$ par

$$g(x) = 18x + \mathrm{e}^{0,5x-1}.$$

Lorsque x représente le nombre de centaines de lots, $g(x)$ est égal au coût total exprimé en centaines d'euros.

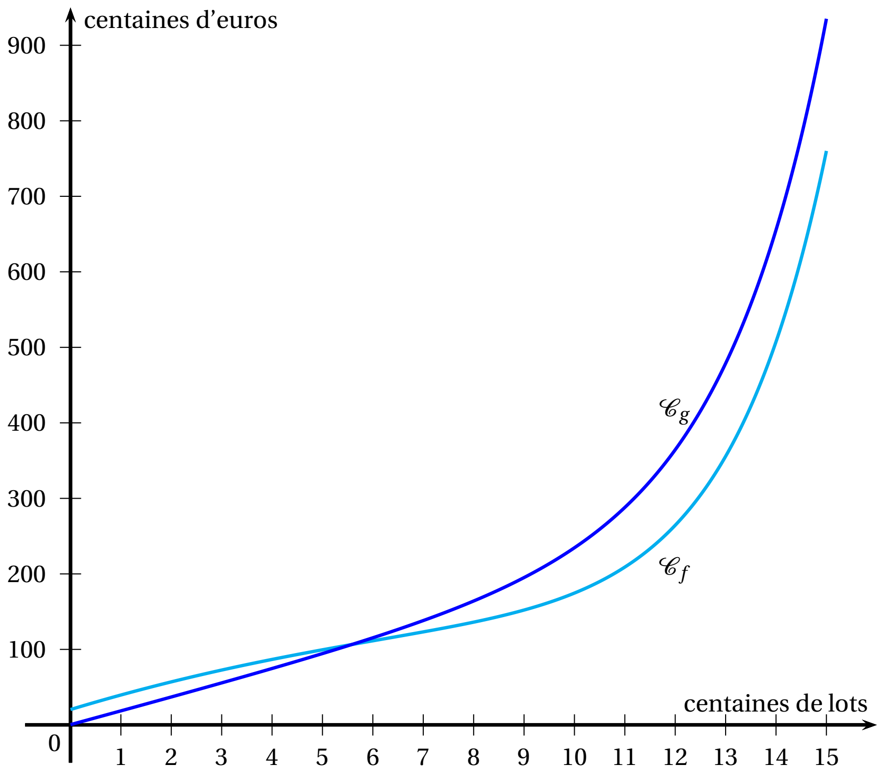
1. Calculer $g'(x)$ où g' désigne la fonction dérivée de g.
2. Justifier que g est strictement croissante sur $[0\,;15]$.

Partie B

L'entreprise acquiert une nouvelle machine qui permet d'obtenir un coût total de fabrication hebdomadaire modélisé par la fonction f définie sur $[0\,;15]$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{0,5x-1} - x^2 + 20x + 20,$$

Lorsque x représente le nombre de centaines de lots, $f(x)$ est égal au coût total exprimé en centaines d'euros.
On note $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_f$ les représentations graphiques respectives des fonctions g et f.



1. Par lecture graphique, donner un encadrement d'amplitude 100 du nombre k de lots à partir duquel cette nouvelle machine permet de diminuer le coût total de production,

2. On cherche à préciser le résultat précédent par le calcul.

a. Montrer que la détermination de k conduit à résoudre l'inéquation $-x^2+2x+20 \leqslant 0$.

b. Résoudre cette inéquation sur l'intervalle $[0\,;\,15]$.

c. En déduire le nombre entier de lots à partir duquel cette nouvelle machine permet de diminuer le coût total de production.

3. On rappelle que le coût marginal obtenu avec cette nouvelle machine est donné par la fonction f'.

Déterminer la valeur moyenne, arrondie à l'euro, du coût marginal lorsqu'on fabrique entre 5 centaines et 8 centaines de lots.

Rappel : la valeur moyenne d'une fonction h sur $[a\,;\,b]$ *est donnée par* $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x$.

EXERCICE 3

[Antilles - Guyane 2014]

Partie A : Médecins et kinésithérapeutes

1. Représentons l'arbre de probabilité en le complétant :

D'après l'énoncé, nous avons :

- M = " la personne choisie est médecin ".
- K = " la personne choisie est kinésithérapeute ".
- O = " la personne choisie pratique l'ostéopathie ".

- $P(M) = 74\%$
- $P(K) = 26\%$

($74\% + 26\% = 1$).

- $P_M(O) = 0.6\%$
- $P_M(\bar{O}) = 99.4\%$

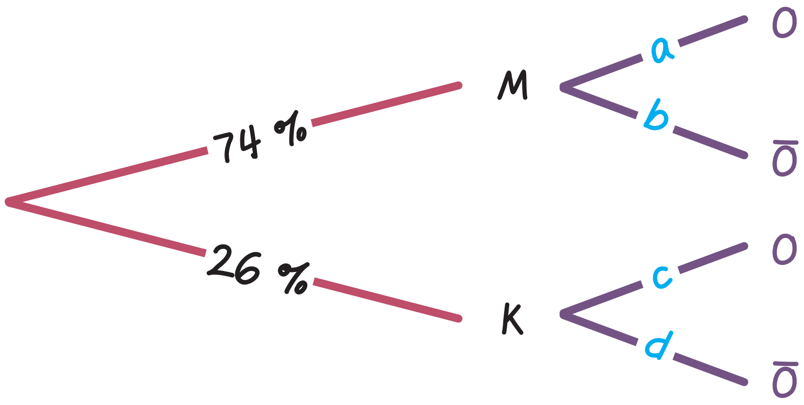
($0.6\% + 99.4\% = 1$).

- $P_K(O) = 8.6\%$
- $P_K(\bar{O}) = 91.4\%$

($8.6\% + 91.4\% = 1$).

Nous pouvons représenter cette situation par un arbre de probabilité.

D'où l'arbre de probabilité suivant:



, avec:

- $a = 0.6\ \%$
- $b = 99.4\ \%$
- $c = 8.6\ \%$
- $d = 91.4\ \%$

.

2. Montrons que $P(O) = 0.0268$:

L'événement $O = (O \cap M) \cup (O \cap K)$.

D'où: $P(O) = P(O \cap M) + P(O \cap K)$

$$= P_M(O) \times P(M) + P_K(O) \times P(K).$$

Ainsi: $P(O) = 0.6\% \times 74\% + 8.6\% \times 26\%$ => $P(O) \approx 0.0268$.

Au total, la probabilité que la personne choisie pratique l'ostéopathie est de: 2.68%.

3. Déterminons la probabilité que le praticien soit un kinésithérapeute sachant l'événement " O ":

Cela revient à calculer: $P_O(K)$.

$$P_O(K) = \frac{P(O \cap K)}{P(O)} \iff P_O(K) = \frac{P(K \cap O)}{P(O)}$$

$$\iff P_O(K) = \frac{P_K(O) \times P(K)}{P(O)}.$$

Ainsi: $P_O(K) = \dfrac{8.6\% \times 26\%}{2.68\%}$ => $P_O(K) \approx 0.83$ à 10^{-2} près.

Au total, la probabilité que le praticien soit un kinésithérapeute sachant l'événement " O " est de: 0.83 à 10^{-2} près.