

# Sujet + Corrigé

ANNALES MATHÉMATIQUES BAC ES  
PROBABILITÉS - 2014

SUJET 2  
AMÉRIQUE DU NORD  
BAC ES - 2014

CORRECTION RÉALISÉE  
PAR ALAIN PILLER



[alainpiller.fr](http://alainpiller.fr)

**Annales Mathématiques Bac 2014**  
**Sujets + Corrigés - Alain Pillier**  
**Amérique du Nord**

**Alain PILLER — Sujet 2**

**Exercice 1**

**4 points**

**Commun à tous les candidats**

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.*

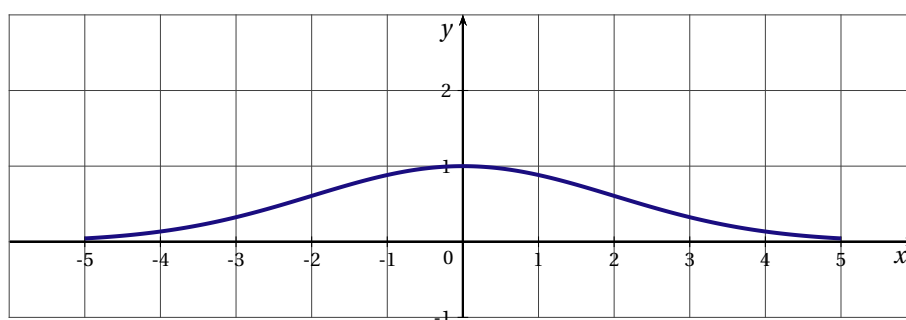
*Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.*

*Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte.*

*Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.*

La courbe  $\mathcal{C}$  ci-dessous est la représentation graphique, dans un repère orthonormé, d'une fonction  $f$  définie et dérivable sur l'intervalle  $[-5; 5]$ .

On note  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ .



1. Sur l'intervalle  $[-5; 5]$  :
  - a.  $f$  est une fonction de densité de probabilité
  - b.  $f$  est positive
  - c.  $f$  n'est pas continue
  - d. l'équation  $f'(x) = 0$  admet deux solutions
2. Sur l'intervalle  $[-5; 5]$  :
  - a.  $f'(1) = 0$
  - b.  $f'(0) = 1$
  - c.  $f'(0) = 0$
  - d.  $f'(1) = 1$
3. On admet qu'une équation de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 4 est  $y = -\frac{x}{e^2} + \frac{5}{e^2}$ .  
 Le nombre dérivé de  $f$  en 4 est :
  - a.  $f'(4) = \frac{5}{e^2}$
  - b.  $f'(4) = \frac{1}{e^2}$
  - c.  $f'(4) = -\frac{1}{e^2}$
  - d.  $f'(4) = e^{-2}$
4. On pose  $A = \int_{-2}^2 f(x) dx$ . Un encadrement de  $A$  est :
  - a.  $0 < A < 1$
  - b.  $1 < A < 2$
  - c.  $3 < A < 4$
  - d.  $4 < A < 5$

Sujet Mathématiques Bac 2014  
 probabilités ES - corrigé

**EXERCICE 2**

**6 points**

**Commun à tous les candidats**

Un investisseur souhaite acheter un appartement dans l'objectif est de le louer. Pour cela, il s'intéresse à la rentabilité locative de cet appartement.

Les trois parties peuvent être traitées indépendamment. Les résultats seront arrondis, si nécessaire, à  $10^{-4}$ .

**PARTIE A**

On considère deux types d'appartement :

- Les appartements d'une ou deux pièces notés respectivement T1 et T2 ;
  - Les appartements de plus de deux pièces.
- Une étude des dossiers d'appartements loués dans un secteur ont montré que :
- 35 % des appartements loués sont de type T1 ou T2 ;
  - 45 % des appartements loués de type T1 ou T2 sont rentables ;
  - 30 % des appartements loués, qui ne sont ni de type T1 ni de type T2, sont rentables.
- On choisit un dossier au hasard et on considère les évènements suivants :
- $T$  : « l'appartement est de type T1 ou T2 » ;
  - $R$  : « l'appartement loué est rentable » ;
  - $\bar{T}$  est l'évènement contraire de  $T$  et  $\bar{R}$  est l'évènement contraire de  $R$ .
1. Traduire cette situation par un arbre pondéré.
  2. Montrer que la probabilité qu'un appartement loué soit rentable est égale à 0,3525.
  3. Calculer la probabilité que l'appartement soit de type T1 ou T2, sachant qu'il est rentable.

**PARTIE B**

On considère  $X$  la variable aléatoire égale au nombre d'appartements rentables dans un échantillon aléatoire de 100 appartements loués. On admet que toutes les conditions sont réunies pour assimiler  $X$  à une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne  $\mu = 35$  et d'écart type  $\sigma = 5$ .

À l'aide de la calculatrice :

1. Calculer  $P(25 \leq X \leq 35)$ .
2. Calculer la probabilité qu'au moins 45 appartements parmi les 100 appartements loués soient rentables.

**PARTIE C**

L'investisseur se rend dans une agence immobilière pour acheter un appartement et le louer. Le responsable de cette agence lui affirme que 60 % des appartements sont rentables.

Pour vérifier son affirmation, on a prélevé au hasard 280 dossiers d'appartements loués. Parmi ceux-ci, 120 sont rentables.

1. Déterminer la fréquence observée sur l'échantillon prélevé.
2. Peut-on valider l'affirmation du responsable de cette agence ? Justifier cette réponse. On pourra s'aider du calcul d'un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

**EXERCICE 3****5 points****Commun à tous les candidats**

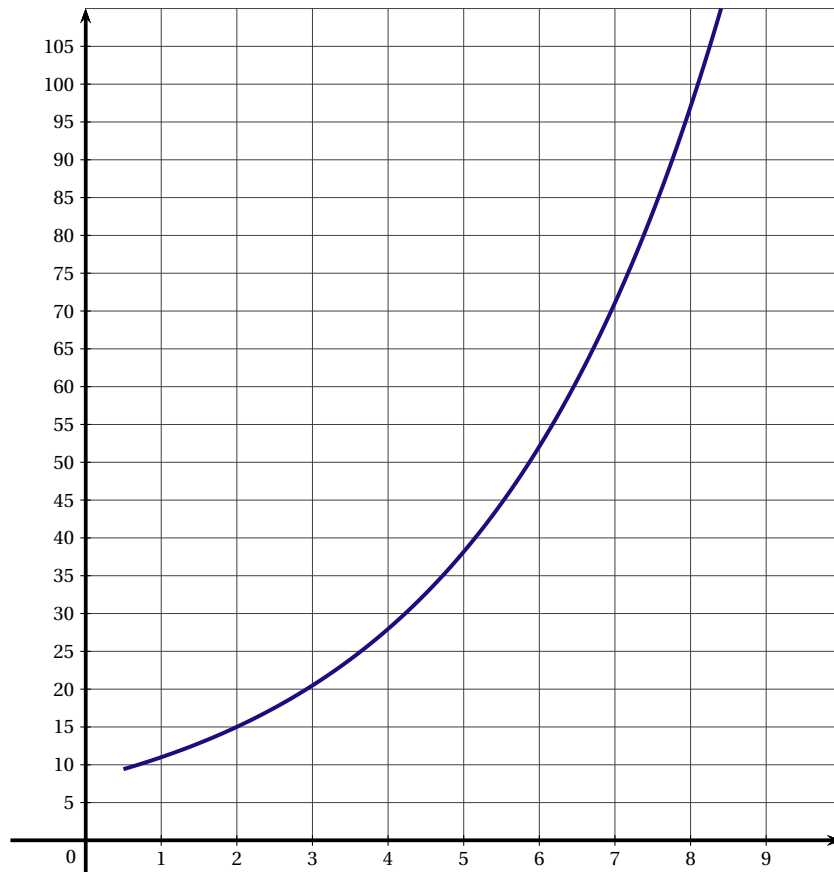
Un site est spécialisé dans la diffusion de vidéos sur internet. Le responsable du site a constaté que la durée de chargement des vidéos évoluait en fonction d'internautes connectés simultanément.

On cherche à estimer la durée de chargement en fonction du nombre de personnes connectées simultanément. Deux fonctions sont proposées pour modéliser cette situation.

**PARTIE A : Modèle exponentiel**

Dans le repère orthogonal ci-dessous, on a tracé la courbe représentative d'une fonction  $f$  qui modélise la situation précédente.

On note  $x$  le nombre, exprimé en millier, d'internautes connectés simultanément et  $f(x)$  la durée de chargement exprimée en seconde.



1. Par lecture graphique, estimer la durée de chargement, en seconde, pour 8 000 personnes connectées.
2. **a.** Déterminer graphiquement un antécédent de 15 par  $f$ .
- b.** Donner une interprétation de ce résultat.

**PARTIE B : Modèle logarithmique**

On considère une autre fonction  $g$  pour modéliser la situation précédente.

On note  $x$  le nombre, exprimé en millier, d'internautes connectés simultanément. La durée de chargement exprimée en seconde est alors  $g(x)$  avec  $g(x) = 10x - 8\ln(x)$  pour  $x$  appartenant à  $[0,5 ; +\infty[$ .

1. Calculer  $g'(x)$ .
2. Dresser le tableau de variations de  $g$  sur l'intervalle  $[0,5 ; +\infty[$ .
3. Justifier que la fonction  $G$  définie sur  $[0,5 ; +\infty[$  par  $G(x) = 5x^2 + 8x - 8x\ln(x)$  est une primitive de  $g$  sur  $[0,5 ; +\infty[$ .
4. On pose  $I = \frac{1}{2} \int_2^4 g(x) dx$ 
  - a.** Montrer que la valeur exacte de  $I$  peut s'écrire sous la forme  $a + b\ln(2)$  où  $a$  et  $b$  sont deux réels que l'on déterminera.
  - b.** Déterminer une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de  $I$  puis donner une interprétation de ce résultat.

**PARTIE C**

Une vidéo particulièrement demandée a attiré simultanément 8 000 personnes. On a constaté que le temps de chargement était de 92 secondes.

Déterminer, en justifiant, celui des deux modèles qui décrit le mieux la situation pour cette vidéo.

**EXERCICE 4**

**5 points**

**Enseignement obligatoire et L**

Afin d'entretenir une forêt vieillissante, un organisme régional d'entretien des forêts décide d'abattre chaque année 5 % des arbres existants et de replanter 3 000 arbres.

Le nombre d'arbres de cette forêt est modélisé par une suite notée  $u$  où  $u_n$  désigne le nombre d'arbres au cours de l'année (2013 +  $n$ ).

En 2013, la forêt compte 50 000 arbres.

1. a. Déterminer le nombre d'arbres de la forêt en 2014.
- b. Montrer que la suite  $u$  est définie par  $u_0 = 50\,000$  et pour tout entier naturel  $n$  par la relation

$$u_{n+1} = 0,95u_n + 3\,000.$$

2. On considère la suite  $v$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $v_n = 60\,000 - u_n$ .
  - a. Montrer que la suite  $v$  est une suite géométrique de raison 0,95.  
Déterminer son premier terme.
  - b. Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .
  - c. En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 10\,000(6 - 0,95^n)$ .
  - d. Déterminer la limite de la suite  $u$ .
  - e. Interpréter le résultat précédent.
3. a. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation  $u_n \geq 57\,000$
- b. Interpréter ce résultat.
4. a. On souhaite écrire un algorithme affichant pour un entier naturel  $n$  donné, tous les termes de la suite du rang 0 au rang  $n$ . Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel.

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3
<b>Variables :</b> $A, U, N$ sont des nombres <b>Début de l'algorithme :</b> Saisir la valeur de $A$ $N$ prend la valeur 0 $U$ prend la valeur 50 000 <b>Tant que</b> $U < A$ $N$ prend la valeur $N + 1$ $U$ prend la valeur $0,95U + 3\,000$ <b>Fin tant que</b> Afficher $N$ <b>Fin algorithme</b>	<b>Variables :</b> $U, I, N$ sont des nombres <b>Début de l'algorithme :</b> Saisir la valeur de $N$ $U$ prend la valeur 50 000 <b>Pour</b> $I$ variant de 1 à $N$ $U$ prend la valeur $0,95U + 3\,000$ <b>Fin Pour</b> Afficher $U$  <b>Fin algorithme</b>	<b>Variables :</b> $U, I, N$ sont des nombres <b>Début de l'algorithme :</b> Saisir la valeur de $N$ $U$ prend la valeur 50 000 <b>Pour</b> $I$ variant de 1 à $N$ Afficher $U$ $U$ prend la valeur $0,95U + 3\,000$ <b>Fin Pour</b> Afficher $U$  <b>Fin algorithme</b>

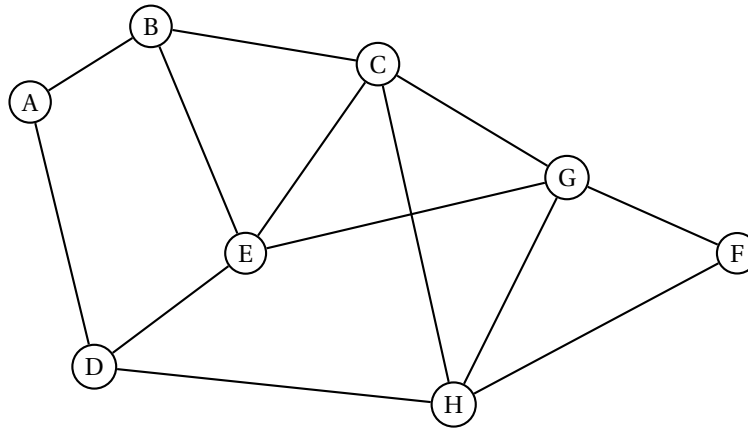
- b. Lorsque  $A = 57\,000$  l'algorithme 1 affiche 24. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

**EXERCICE 4**

**5 points**

**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Lors d'une campagne électorale, un homme politique doit effectuer une tournée dans les villes A, B, C, D, E, F, G et H, en utilisant le réseau autoroutier. Le graphe  $\mathcal{G}$  ci-dessous, représente les différentes villes de la tournée et les tronçons d'autoroute reliant ces villes (une ville est représentée par un sommet, un tronçon d'autoroute par une arête) :



**Partie A**

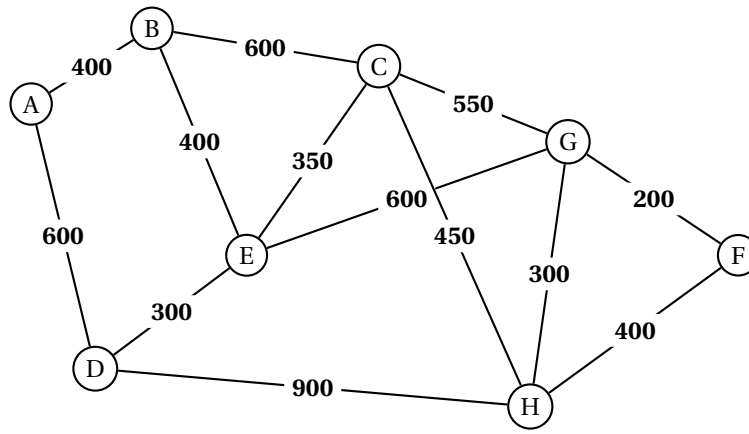
1. Déterminer, en justifiant, si le graphe  $\mathcal{G}$  est :
  - a. complet;
  - b. connexe.
2. a. Justifier qu'il est possible d'organiser la tournée en passant au moins une fois par chaque ville, tout en empruntant une fois et une seule chaque tronçon d'autoroute.  
 b. Citer un trajet de ce type.
3. On appelle  $M$  la matrice d'adjacence associée au graphe  $\mathcal{G}$  (les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique).
  - a. Déterminer la matrice  $M$ .
  - b. On donne la matrice

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & 5 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 7 & 2 & 8 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 6 & 4 & 9 & 3 & 9 & 10 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 9 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 8 & 9 & 9 & 4 & 4 & 10 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 4 & 2 & 6 & 6 \\ 4 & 3 & 9 & 3 & 10 & 6 & 6 & 9 \\ 1 & 5 & 10 & 8 & 4 & 6 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

Déterminer, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant E à H.  
 Préciser ces chemins.

**Partie B**

Des contraintes d'organisation obligent cet homme politique à se rendre dans la ville F après la ville A. Le graphe  $\mathcal{G}$  est complété ci-dessous par les longueurs en kilomètre de chaque tronçon d'autoroute.



Déterminer, en utilisant l'algorithme de Dijkstra, le trajet autoroutier le plus court pour aller de A à F. Préciser la longueur en kilomètre de ce trajet.

## EXERCICE 2

[ Amérique du Nord 2014 ]

### Partie A: Appartements $T_1$ et $T_2$

1. Traduisons cette situation par un arbre pondéré:

D'après l'énoncé, nous avons:

- $T$  = " l'appartement est de type  $T_1$  ou  $T_2$  ".
- $\bar{T}$  = " l'appartement n'est pas de type  $T_1$  ou  $T_2$  ".
- $R$  = " l'appartement loué est rentable ".
- $\bar{R}$  = " l'appartement loué n'est pas rentable ".

- $P(T) = 35\%$
- $P(\bar{T}) = 65\%$   
(  $35\% + 65\% = 1$  ).

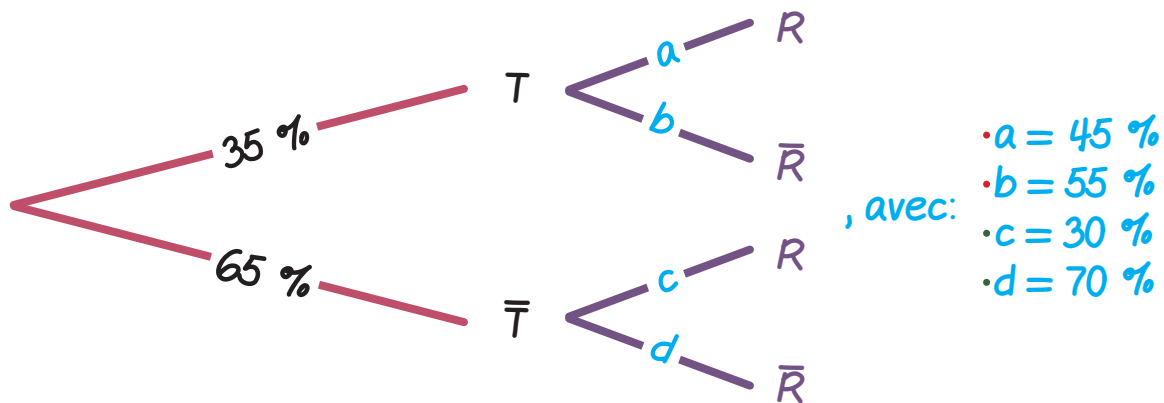
- $P_T(R) = 45\%$
- $P_T(\bar{R}) = 55\%$   
(  $45\% + 55\% = 1$  ).

- $P_{\bar{T}}(R) = 30\%$
- $P_{\bar{T}}(\bar{R}) = 70\%$   
(  $30\% + 70\% = 1$  ).

Nous pouvons traduire cette situation par un arbre pondéré.



D'où l'arbre pondéré suivant:



2. Montrons que la probabilité, qu'un appartement loué soit rentable, est bien égale à 0.3525:

Cela revient à calculer:  $P(R)$ .

L'événement  $R = (R \cap T) \cup (R \cap \bar{T})$ .

D'où:  $P(R) = P(R \cap T) + P(R \cap \bar{T})$

$$= P_T(R) \times P(T) + P_{\bar{T}}(R) \times P(\bar{T}).$$

Ainsi:  $P(R) = 45\% \times 35\% + 30\% \times 65\% \Rightarrow P(R) = 0.3525$ .

Au total, la probabilité qu'un appartement loué soit rentable est bien égale à: 35.25%.

3. Calculons la probabilité que l'appartement soit de type  $T_1$  ou  $T_2$ , sachant qu'il est rentable:

Cela revient à calculer:  $P_R(T)$ .

$$P_R(T) = \frac{P(R \cap T)}{P(R)} \Leftrightarrow P_R(T) = \frac{P(T \cap R)}{P(R)}$$

$$\Leftrightarrow P_R(T) = \frac{P_T(R) \times P(T)}{P(R)}$$

$$\text{Ainsi: } P_R(T) = \frac{45\% \times 35\%}{35.25\%} \Rightarrow P_R(T) \approx 44.68\%$$

Au total, la probabilité que l'appartement soit de type  $T_1$  ou  $T_2$ , sachant qu'il est rentable, est de: 44.68%.