

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2015

MATHÉMATIQUES

Série S

ÉPREUVE DU LUNDI 22 JUIN 2015

Enseignement Obligatoire *Coefficient : 7*

Durée de l'épreuve : 4 heures

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.
Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.

Le candidat doit traiter tous les exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (6 points) Commun à tous les candidats

Les résultats des probabilités seront arrondis à 10^{-3} près.

Partie 1

1. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ , où λ est un réel strictement positif donné.

On rappelle que la densité de probabilité de cette loi est la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

a. Soit c et d deux réels tels que $0 \leq c < d$.

Démontrer que la probabilité $P(c \leq X \leq d)$ vérifie $P(c \leq X \leq d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$.

b. Déterminer une valeur de λ à 10^{-3} près de telle sorte que la probabilité $P(X > 20)$ soit égale à 0,05.

c. Donner l'espérance de la variable aléatoire X .

Dans la suite de l'exercice on prend $\lambda = 0,15$.

d. Calculer $P(10 \leq X \leq 20)$.

e. Calculer la probabilité de l'événement $(X > 18)$.

2. Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 16 et d'écart type 1,95.

a. Calculer la probabilité de l'événement $(20 \leq Y \leq 21)$.

b. Calculer la probabilité de l'événement $(Y < 11) \cup (Y > 21)$.

Partie 2

Une chaîne de magasins souhaite fidéliser ses clients en offrant des bons d'achat à ses clients privilégiés. Chacun d'eux reçoit un bon d'achat de couleur verte ou rouge sur lequel est inscrit un montant.

Les bons d'achats sont distribués de façon à avoir, dans chaque magasin, un quart de bons rouges et trois quarts de bons verts.

Les bons d'achat verts prennent la valeur de 30 euros avec une probabilité égale à 0,067 ou des valeurs comprises entre 0 et 15 euros avec des probabilités non précisées ici.

De façon analogue, les bons d'achat rouges prennent les valeurs 30 ou 100 euros avec des probabilités respectivement égales à 0,015 et 0,010 ou des valeurs comprises entre 10 et 20 euros avec des probabilités non précisées ici.

1. Calculer la probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros sachant qu'il est rouge.
2. Montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros vaut 0,057.

Pour la question suivante, on utilise cette valeur.

3. Dans un des magasins de cette chaîne, sur 200 clients privilégiés, 6 ont reçu un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 €.

Le directeur du magasin considéré estime que ce nombre est insuffisant et doute de la répartition au hasard des bons d'achats dans les différents magasins de la chaîne.
Ses doutes sont-ils justifiés ?

Exercice 2 (3 points)**Commun à tous les candidats**

Dans un repère orthonormé (O, I, J, K) d'unité 1 cm, on considère les points $A(0 ; -1 ; 5)$, $B(2 ; -1 ; 5)$, $C(11 ; 0 ; 1)$, $D(11 ; 4 ; 4)$.

Un point M se déplace sur la droite (AB) dans le sens de A vers B à la vitesse de 1 cm par seconde.

Un point N se déplace sur la droite (CD) dans le sens de C vers D à la vitesse de 1 cm par seconde.

À l'instant $t=0$ le point M est en A et le point N est en C .

On note M_t et N_t les positions des points M et N au bout de t secondes, t désignant un nombre réel positif.

On admet que M_t et N_t ont pour coordonnées : $M_t(t ; -1 ; 5)$ et $N_t(11 ; 0,8 t ; 1+0,6 t)$.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1.

- a. La droite (AB) est parallèle à l'un des axes (OI) , (OJ) ou (OK) . Lequel ?
- b. La droite (CD) se trouve dans un plan \mathcal{P} parallèle à l'un des plans (OIJ) , (OIK) ou (OJK) . Lequel ? On donnera une équation de ce plan \mathcal{P} .
- c. Vérifier que la droite (AB) , orthogonale au plan \mathcal{P} , coupe ce plan au point $E(11 ; -1 ; 5)$.
- d. Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?

2.

- a. Montrer que $M_t N_t^2 = 2 t^2 - 25,2 t + 138$.
- b. À quel instant t la longueur $M_t N_t$ est-elle minimale ?

Exercice 3 (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

1. Résoudre dans l'ensemble \mathbf{C} des nombres complexes l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^2 - 8z + 64 = 0$$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathbf{O}; \vec{u}, \vec{v})$.

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 4 + 4i\sqrt{3}$, $b = 4 - 4i\sqrt{3}$ et $c = 8i$.

- a. Calculer le module et un argument du nombre a .
- b. Donner la forme exponentielle des nombres a et b .
- c. Montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle \mathcal{C} de centre O dont on déterminera le rayon.
- d. Placer les points A, B et C dans le repère $(\mathbf{O}; \vec{u}, \vec{v})$.

Pour la suite de l'exercice, on pourra s'aider de la figure de la question 2.d. complétée au fur et à mesure de l'avancement des questions.

3. On considère les points A', B' et C' d'affixes respectives $a' = a e^{i\frac{\pi}{3}}$, $b' = b e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $c' = c e^{i\frac{\pi}{3}}$.

- a. Montrer que $b' = 8$.
- b. Calculer le module et un argument du nombre a' .

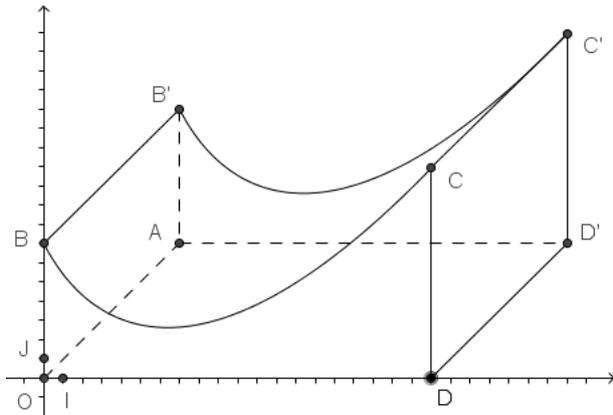
Pour la suite on admet que $a' = -4 + 4i\sqrt{3}$ et $c' = -4\sqrt{3} + 4i$.

4. On admet que si M et N sont deux points du plan d'affixes respectives m et n alors le milieu I du segment $[MN]$ a pour affixe $\frac{m+n}{2}$ et la longueur MN est égale à $|n-m|$.

- a. On note r , s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments $[A'B']$, $[B'C']$ et $[C'A']$.

Calculer r et s . On admet que $t = 2 - 2\sqrt{3} + i(2 + 2\sqrt{3})$.

- b. Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature du triangle RST ? Justifier ce résultat.

Exercice 4 (6 points)**Commun à tous les candidats**

Une municipalité a décidé d'installer un module de skateboard dans un parc de la commune.

Le dessin ci-contre en fournit une perspective cavalière. Les quadrilatères $OAD'D$, $DD'C'C$, et $OAB'B$ sont des rectangles.

Le plan de face (OBD) est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

L'unité est le mètre. La largeur du module est de 10 mètres, autrement dit, $DD' = 10$, sa longueur OD est de 20 mètres.

Le but du problème est de déterminer l'aire des différentes surfaces à peindre.

Le profil du module de skateboard a été modélisé à partir d'une photo par la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 20]$ par

$$f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans le repère (O, I, J) .

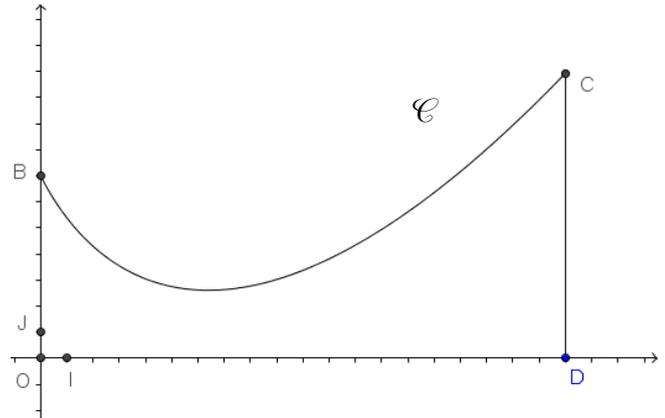
Partie 1

1. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; 20]$, on a $f'(x) = \ln(x+1) - 2$.
2. En déduire les variations de f sur l'intervalle $[0 ; 20]$ et dresser son tableau de variation.
3. Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 0.

La valeur absolue de ce coefficient est appelée l'inclinaison du module de skateboard au point B.

4. On admet que la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; 20]$ par $g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 \ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$ a pour dérivée la fonction g' définie sur l'intervalle $[0 ; 20]$ par $g'(x) = (x+1)\ln(x+1)$.

Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 20]$.



15MASCOMLR1

Partie 2

Les trois questions de cette partie sont indépendantes.

- Les propositions suivantes sont-elles exactes ? Justifier les réponses.
 P1 : La différence de hauteur entre le point le plus haut et le point le plus bas de la piste est au moins égale à 8 mètres.
 P2 : L'inclinaison de la piste est presque deux fois plus grande en B qu'en C.
- On souhaite recouvrir les quatre faces latérales de ce module d'une couche de peinture rouge. La peinture utilisée permet de couvrir une surface de 5 m² par litre.

Déterminer, à 1 litre près, le nombre minimum de litres de peinture nécessaires.

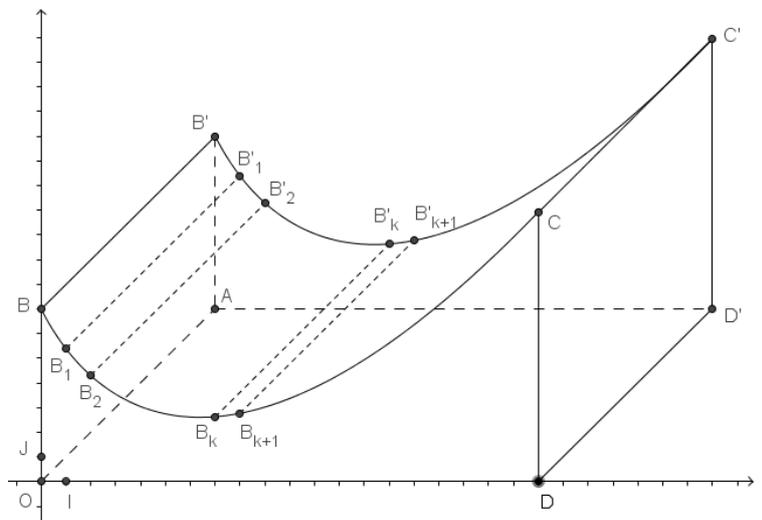
- On souhaite peindre en noir la piste roulante, autrement dit la surface supérieure du module.

Afin de déterminer une valeur approchée de l'aire de la partie à peindre, on considère dans le repère (O, I, J) du plan de face, les points B_k(k; f(k)) pour k variant de 0 à 20.

Ainsi, B₀ = B.

On décide d'approcher l'arc de la courbe C allant de B_k à B_{k+1} par le segment [B_kB_{k+1}].

Ainsi l'aire de la surface à peindre sera approchée par la somme des aires des rectangles du type B_k B_{k+1} B'_{k+1} B'_k (voir figure).



- Montrer que pour tout entier k variant de 0 à 19, $B_k B_{k+1} = \sqrt{1 + (f(k+1) - f(k))^2}$.
- Compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche une estimation de l'aire de la partie roulante.

Variables	S: réel K: entier
Fonction	f: définie par $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7$
Traitement	S prend pour valeur 0 Pour K variant de à S prend pour valeur Fin Pour
Sortie	Afficher

EXERCICE 1 (France Métropolitaine 2015)¹

Partie 1 : Loi exponentielle

① a) Démontrons que $P(c \leq X \leq d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$.

D'après l'énoncé, nous savons que :

- X suit une loi exponentielle de paramètre λ .

Dans ces conditions :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad \forall x \in [0, +\infty[.$$

Il s'agit de calculer : $P(c \leq X \leq d)$.

$$\begin{aligned} P(c \leq X \leq d) &= \int_c^d f(x) dx \\ &= \int_c^d \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_c^d \\ &= \left[-e^{-\lambda x} \right]_c^d \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{P(c \leq X \leq d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}}.$$

Au total, nous avons bien : $P(c \leq X \leq d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$.

② Déterminons une valeur de λ telle que $P(X > 20) = 0,05$.

$$\begin{aligned} P(X > 20) &= 1 - P(X \leq 20) \\ &= 1 - P(0 \leq X \leq 20). \end{aligned}$$

$$\text{D'où: } P(X > 20) = 0,05 \Leftrightarrow P(0 \leq X \leq 20) = 0,95$$

$$\Leftrightarrow e^{-\lambda \times 0} - e^{-\lambda \times 20} = 0,95$$

$$\Leftrightarrow 1 - e^{-20\lambda} = 0,95$$

$$\Rightarrow \underline{\lambda \approx 0,15.}$$

Au total, la valeur de λ est: $\lambda = 0,15$.

③ Calculons $E(X)$:

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x \cdot f(x) dx$$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x \cdot (\lambda e^{-\lambda x}) dx$$

$$= \frac{1}{\lambda}, \text{ d'après le cours.}$$

$$\text{Comme } \lambda = 0,15, \underline{E(X) \approx 6,66.}$$

Au total, nous avons: $E(X) \approx 6,66$.

④ Calculons $P(10 \leq X \leq 20)$:

$$P(10 \leq X \leq 20) = e^{-\lambda \times 10} - e^{-\lambda \times 20}$$

$$= e^{-1,5} - e^{-3}$$

$$\Rightarrow \underline{P(10 \leq X \leq 20) \approx 0,173.}$$

Au total, la probabilité demandée est de: 17,3%.

② Calculons $P(X > 18)$.

$$\begin{aligned} P(X > 18) &= 1 - P(X \leq 18) \\ &= 1 - P(0 \leq X \leq 18) \\ &= 1 - \left(e^0 - e^{-0,15 \times 18} \right) \\ \Rightarrow \underline{P(X > 18) \approx 0,067.} \end{aligned}$$

Au total, la probabilité demandée est de: 6,7%.

② ① Calculons $P(20 \leq Y \leq 21)$.

D'après l'énoncé, nous savons que:

- Y suit la loi normale d'espérance $\mu = 16$ et d'écart type $\sigma = 1,95$.

Il s'agit de calculer: $P(20 \leq Y \leq 21)$.

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$\underline{P(20 \leq Y \leq 21) \approx 0,015.}$$

Au total, la probabilité demandée est de: 1,5%.

② Calculons $P((Y < 11) \cup (Y > 21))$.

Il s'agit de calculer: $P((Y < 11) \cup (Y > 21))$.

$$P((Y < 11) \cup (Y > 21)) = 1 - P(11 \leq Y \leq 21).$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$\underline{P((Y < 11) \cup (Y > 21)) \approx 0,01.}$$

Au total, la probabilité demandée est de: 1%.