Sujet + Corrigé

ANNALES MATHÉMATIQUES BAC S

NOMBRES COMPLEXES - 2015

SUJET 2
AMÉRIQUE DU NORD
BAC S - 2015

CORRECTION RÉALISÉE
PAR ALAIN PILLER

alainpiller.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2015

MATHÉMATIQUES

Série S
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

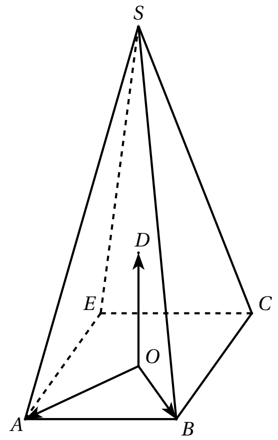
Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7 dont deux annexes en pages 6/7 et 7/7 qui sont à rendre avec la copie.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 1 (5 points)

Dans l'espace, on considère une pyramide $SABCE$ à base carrée $ABCE$ de centre O. Soit D le point de l'espace tel que $(O\,;\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD})$ soit un repère orthonormé. Le point S a pour coordonnées $(0\,;0\,;3)$ dans ce repère.



Partie A

1. Soit U le point de la droite (SB) de cote 1. Construire le point U sur la figure jointe en **annexe 1**, **(à rendre avec la copie)**.
2. Soit V le point d'intersection du plan (AEU) et de la droite (SC). Montrer que les droites (UV) et (BC) sont parallèles. Construire le point V sur la figure jointe en **annexe 1**, **(à rendre avec la copie)**.
3. Soit K le point de coordonnées $\left(\frac{5}{6}\,;-\frac{1}{6}\,;0\right)$.
   Montrer que K est le pied de la hauteur issue de U dans le trapèze $AUVE$.

Partie B

Dans cette partie, on admet que l'aire du quadrilatère $AUVE$ est $\frac{5\sqrt{43}}{18}$.

1. On admet que le point U a pour coordonnées $\left(0\,;\frac{2}{3}\,;1\right)$.
   Vérifier que le plan (EAU) a pour équation $3x-3y+5z-3=0$.
2. Donner une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (EAU) passant par le point S.
3. Déterminer les coordonnées de H, point d'intersection de la droite (d) et du plan (EAU).
4. Le plan (EAU) partage la pyramide $(SABCE)$ en deux solides. Ces deux solides ont-ils le même volume ?

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On se place dans un repère orthonormé et, pour tout entier naturel n, on définit les points (A_n) par leurs coordonnées $(x_n\,;\,y_n)$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = 4 \end{cases} \quad \text{et pour tout entier naturel } n : \begin{cases} x_{n+1} = 0,8x_n - 0,6y_n \\ y_{n+1} = 0,6x_n + 0,8y_n \end{cases}$$

1. a) Déterminer les coordonnées des points A_0, A_1 et A_2.

   b) Pour construire les points A_n ainsi obtenus, on écrit l'algorithme suivant :

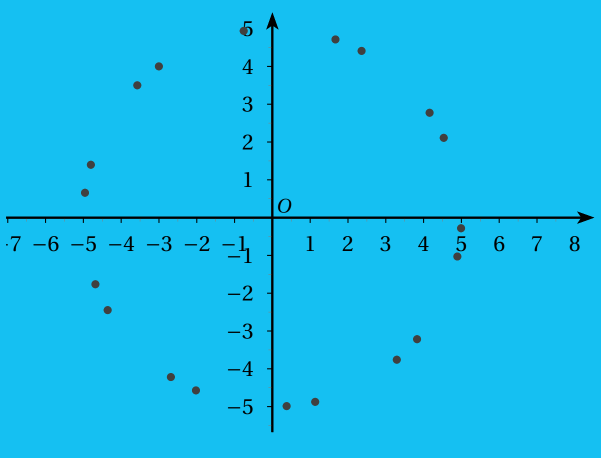
   Variables :
   i, x, y, t : nombres réels

   Initialisation :
   x prend la valeur -3
   y prend la valeur 4

   Traitement :
   Pour i allant de 0 à 20
   Construire le point de coordonnées $(x; y)$
   t prend la valeur x
   x prend la valeur ....
   y prend la valeur ....
   Fin Pour

   Recopier et compléter cet algorithme pour qu'il construise les points A_0 à A_{20}.

   c) À l'aide d'un tableur, on a obtenu le nuage de points suivant :



   Identifier les points A_0, A_1 et A_2. On les nommera sur la figure jointe en **annexe 2, (à rendre avec la copie)**.

   Quel semble être l'ensemble auquel appartiennent les points A_n pour tout n entier naturel ?

2. Le but de cette question est de construire géométriquement les points A_n pour tout n entier naturel.
Dans le plan complexe, on nomme, pour tout entier naturel n, $z_n = x_n + \mathrm{i}\, y_n$ l'affixe du point A_n.

   a) Soit $u_n = |z_n|$. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 5$. Quelle interprétation géométrique peut-on faire de ce résultat ?
   b) On admet qu'il existe un réel θ tel que $\cos\theta = 0,8$ et $\sin\theta = 0,6$.
   Montrer que, pour tout entier naturel n, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z_n = z_{n+1}$.
   c) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} z_0$.
   d) Montrer que $\theta + \dfrac{\pi}{2}$ est un argument du nombre complexe z_0.
   e) Pour tout entier naturel n, déterminer, en fonction de n et θ, un argument du nombre complexe z_n. Représenter θ sur la figure jointe en **annexe 2**, **(à rendre avec la copie)**.
   Expliquer, pour tout entier naturel n, comment construire le point A_{n+1} à partir du point A_n.

EXERCICE 3 (4 points)

Une entreprise fabrique des tablettes de chocolat de 100 grammes. Le service de contrôle qualité effectue plusieurs types de contrôle.

Partie A Contrôle avant la mise sur le marché

Une tablette de chocolat doit peser 100 grammes avec une tolérance de deux grammes en plus ou en moins. Elle est donc mise sur le marché si sa masse est comprise entre 98 et 102 grammes.
La masse (exprimée en grammes) d'une tablette de chocolat peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 100$ et d'écart-type $\sigma = 1$. Le réglage des machines de la chaîne de fabrication permet de modifier la valeur de σ.

1. Calculer la probabilité de l'événement M : « la tablette est mise sur le marché ».
2. On souhaite modifier le réglage des machines de telle sorte que la probabilité de cet événement atteigne 0,97.
Déterminer la valeur de σ pour que la probabilité de l'événement « la tablette est mise sur le marché » soit égale à 0,97.

Partie B Contrôle à la réception

Le service contrôle la qualité des fèves de cacao livrées par les producteurs. Un des critères de qualité est le taux d'humidité qui doit être de 7 %. On dit alors que la fève est conforme.
L'entreprise a trois fournisseurs différents : le premier fournisseur procure la moitié du stock de fèves, le deuxième 30 % et le dernier apporte 20 % du stock.
Pour le premier, 98 % de sa production respecte le taux d'humidité ; pour le deuxième, qui est un peu moins cher, 90 % de sa production est conforme, et le troisième fournit 20 % de fèves non conformes. On choisit au hasard une fève dans le stock reçu. On note F_i l'événement « la fève provient du fournisseur i », pour i prenant les valeurs 1, 2 ou 3, et C l'événement « la fève est conforme ».

1. Déterminer la probabilité que la fève provienne du fournisseur 1, sachant qu'elle est conforme. Le résultat sera arrondi à 10^{-2}.
2. Le troisième fournisseur ayant la plus forte proportion de fèves non conformes, l'entreprise décide de ne conserver que les fournisseurs 1 et 2. De plus, elle souhaite que 92 % de fèves qu'elle achète soient conformes. Quelle proportion p de fèves doit-elle acheter au fournisseur 1 pour atteindre cet objectif ?

EXERCICE 4 (6 points)

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $u(x) = \ln(x) + x - 3$.

1. Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
2. Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.
3. En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2) + 2$.

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0.
2. a) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{u(x)}{x^2}$ où u est la fonction définie dans la **partie A**.
   b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

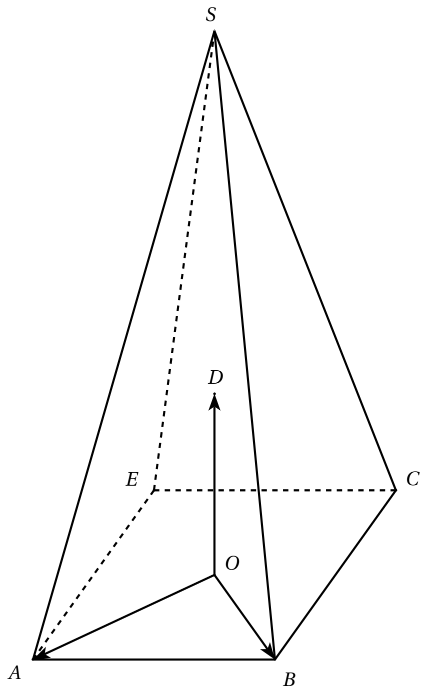
Partie C

Soit $\mathscr{C}'$ la courbe d'équation $y = \ln(x)$.

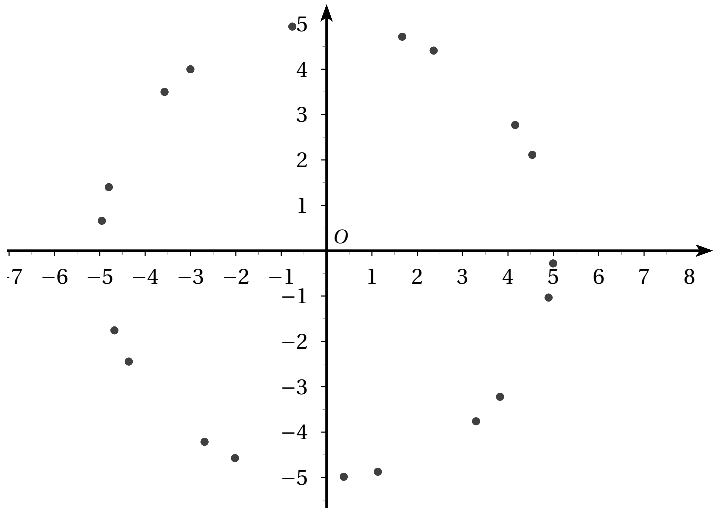
1. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f(x) - \ln(x) = \dfrac{2 - \ln(x)}{x}$.
   En déduire que les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.
2. On admet que la fonction H définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $H(x) = \dfrac{1}{2}(\ln(x))^2$ est une primitive de la fonction h définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.
   Calculer $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} \dfrac{2 - \ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.
   Interpréter graphiquement ce résultat.

Annexe

Annexe 1 (Exercice 1)



Annexe 2 (Exercice 2)



EXERCICE 2 (Amérique du Nord 2015)

1 a) Déterminons les coordonnées des points A_0, A_1 et A_2 :

Nous avons : $\begin{cases} x_{n+1} = 0{,}8x_n - 0{,}6y_n \\ y_{n+1} = 0{,}6x_n + 0{,}8y_n \end{cases}$ et $\begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = 4 \end{cases}$.

Dans ces conditions :

- $A_0(-3;4)$
- $A_1(0{,}8\times -3 - 0{,}6\times 4 \,;\, 0{,}6\times -3 + 0{,}8\times 4)$ cad $A_1(-4{,}8;1{,}4)$
- $A_2(0{,}8\times -4{,}8 - 0{,}6\times 1{,}4 \,;\, 0{,}6\times -4{,}8 + 0{,}8\times 1{,}4)$

  cad $A_2(-4{,}68;-1{,}76)$.

Au total : $A_0(-3;4)$, $A_1(-4{,}8;1{,}4)$ et $A_2(-4{,}68;-1{,}76)$.

b) Complétons l'algorithme pour qu'il construise les points A_0 à A_{20} :

⋮

Traitement :

Pour i allant de 0 à 20

  Construire le point de coordonnées $(x;y)$

  t prend la valeur x

  x prend la valeur $0{,}8\times x - 0{,}6\times y$

  y prend la valeur $0{,}6\times t + 0{,}8\times y$

Fin Pour

c) Identifions les points A_0, A_1 et A_2 :

Voir dernière page de ce corrigé.

Notons que tous les points semblent être sur un cercle de centre O et de rayon $R = 5$.

② ⓐ Montrons que, pour tout entier naturel n, $u_n = 5$:

Ayons recours à une démonstration par récurrence.

Initialisation :

. $u_0 = |z_0| \Leftrightarrow u_0 = |-3+4i| \Leftrightarrow u_0 = 5$, vrai.

. $u_1 = |z_1| \Leftrightarrow u_1 = |-4{,}8+1{,}4i| \Leftrightarrow u_1 = 5$, vrai.

Hérédité : Supposons que pour tout entier naturel n, $u_n = 5$ et montrons qu'alors : $u_{n+1} = 5$.

Supposons : $u_n = 5$.

Dans ces conditions : $u_{n+1} = |z_{n+1}|$

$$\Rightarrow u_{n+1} = |(0{,}8x_n - 0{,}6y_n) + i(0{,}6x_n + 0{,}8y_n)|$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = \left((0{,}8x_n - 0{,}6y_n)^2 + (0{,}6x_n + 0{,}8y_n)^2\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow (u_{n+1})^2 = 0{,}64x_n^2 + 0{,}36y_n^2 - 0{,}96x_ny_n + 0{,}36x_n^2 + 0{,}64y_n^2 + 0{,}96x_ny_n$$

$$\Rightarrow (u_{n+1})^2 = x_n^2 + y_n^2$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = (x_n^2 + y_n^2)^{1/2}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = |z_n|$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = u_n$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = 5.$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, nous avons : $U_n = 5$.

Une interprétation géométrique est que tous les points A_i sont situés sur : le même cercle de centre O et de rayon $R = 5$ $(U_n = 5 = |z_n| = OA_n)$.

ⓑ Montrons que, pour tout entier n, $e^{i\theta} z_n = z_{n+1}$:

• $z_{n+1} = x_{n+1} + i y_{n+1}$ $\Rightarrow$ $z_{n+1} = (0{,}8x_n - 0{,}6y_n) + i(0{,}6x_n + 0{,}8y_n)$.

• $e^{i\theta} z_n = (\cos\theta + i\sin\theta)(x_n + iy_n)$

$= (0{,}8 + 0{,}6i)(x_n + iy_n)$

$= 0{,}8x_n + i\,0{,}8y_n + i\,0{,}6x_n - 0{,}6y_n$

$\Rightarrow e^{i\theta} z_n = (0{,}8x_n - 0{,}6y_n) + i(0{,}6x_n + 0{,}8y_n)$.

Au total : $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{i\theta} z_n = z_{n+1}$.

ⓒ Démontrons que, pour tout entier naturel n, $z_n = e^{in\theta} z_0$:

Nous savons que : $z_{n+1} = e^{i\theta} z_n$.

Ainsi : (z_n) est une suite géométrique de raison $q = e^{i\theta}$ et de premier terme $z_0 = -3+4i$.

Dans ces conditions, nous pouvons écrire : $z_n = e^{in\theta} z_0$.

Au total : $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = e^{in\theta} z_0$.

ⓓ Montrons que $\theta + \pi/2$ est un argument de z_0 :

Nous savons que : $z_0 = -3+4i$.

Or, le module de z_0 est : $r_0 = 5$.

Ainsi, nous pouvons écrire : $z_0 = 5\left(\frac{-3}{5} + \frac{4}{5}i\right)$

$$= 5(-0{,}6 + 0{,}8i)$$

$$= 5i(0{,}6i + 0{,}8)$$

$$= 5i(0{,}8 + 0{,}6i)$$

$$\Rightarrow z_0 = 5i(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Or, $5i = 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 5i = 5e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Dans ces conditions : $z_0 = 5e^{i\frac{\pi}{2}} \times (\cos\theta + i\sin\theta)$

$$= 5e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\theta}$$

$$\Rightarrow z_0 = 5e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}.$$

Au total : z_0 a pour module $r_0 = 5$ et pour argument $\frac{\pi}{2} + \theta$.

ⓔ. Déterminons, en fonction de n et θ, un argument de z_n :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ z_n = e^{in\theta} z_0 \\ \bullet\ z_0 = 5e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)} \end{array}\right\} \Longrightarrow z_n = 5e^{in\theta}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}.$$

Ainsi : $z_n = 5e^{i\left(\frac{\pi}{2} + (n+1)\theta\right)}$.

Au total : un argument de z_n est donc $\frac{\pi}{2} + (n+1)\theta$.

- **Représentons θ sur la figure :**

Voir dernière page de ce corrigé.

- **Explication :**

Pour construire A_{n+1} à partir de A_n, il suffit d'effectuer : une rotation de centre O et d'angle θ, et ce, tout autour du cercle de centre O et de rayon $R = 5$.

Annexe 2 (Exercice 2)