

Sujet + Corrigé

ANNALES MATHÉMATIQUES BAC S
SUITES - 2015

SUJET 7
INDE
BAC S - 2015

**CORRECTION RÉALISÉE
PAR ALAIN PILLER**



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2015

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

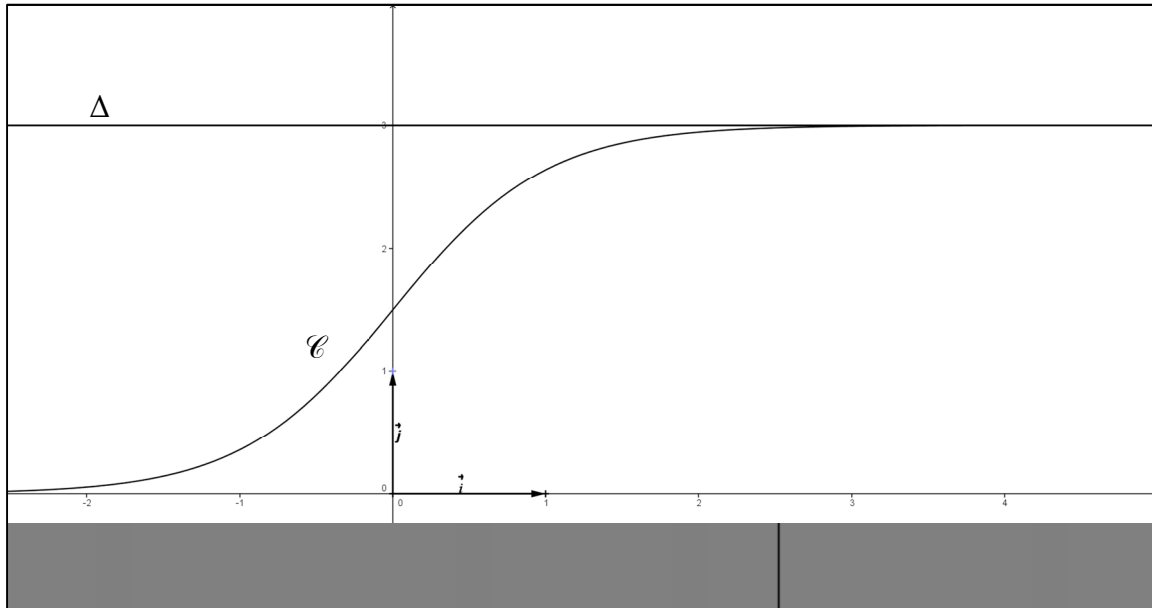
Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Le sujet comporte une annexe numérotée 7/7 à remettre avec la copie.

EXERCICE 1 (4 points)*Commun à tous les candidats***Partie A**

Soit f la fonction définie sur \mathbf{R} par $f(x) = \frac{3}{1 + e^{-2x}}$.

Sur le graphique ci-après, on a tracé, dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative \mathcal{C} de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = 3$.



1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur \mathbf{R} .
2. Justifier que la droite Δ est asymptote à la courbe \mathcal{C} .
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 2,999$ admet une unique solution α sur \mathbf{R} .
Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

Partie B

Soit h la fonction définie sur \mathbf{R} par $h(x) = 3 - f(x)$.

1. Justifier que la fonction h est positive sur \mathbf{R} .
2. On désigne par H la fonction définie sur \mathbf{R} par $H(x) = -\frac{3}{2} \ln(1 + e^{-2x})$.
Démontrer que H est une primitive de h sur \mathbf{R} .
3. Soit a un réel strictement positif.
 - a. Donner une interprétation graphique de l'intégrale $\int_0^a h(x) dx$.

b. Démontrer que $\int_0^a h(x) dx = \frac{3}{2} \ln\left(\frac{2}{1+e^{-2a}}\right)$.

c. On note \mathcal{D} l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan défini par $\begin{cases} x \geq 0 \\ f(x) \leq y \leq 3 \end{cases}$.

Déterminer l'aire, en unité d'aire, du domaine \mathcal{D} .

Sujet Mathématiques Bac 2015
suites S - corrigé

EXERCICE 2 (5 points)

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n , par la relation $u_{n+1} = au_n + b$ (a et b réels non nuls tels que $a \neq 1$).

On pose, pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$.

1. Démontrer que, la suite (v_n) est géométrique de raison a .
2. En déduire que si a appartient à l'intervalle $] -1 ; 1[$, alors la suite (u_n) a pour limite

$$\frac{b}{1-a}.$$

Partie B

En mars 2015, Max achète une plante verte mesurant 80 cm. On lui conseille de la tailler tous les ans, au mois de mars, en coupant un quart de sa hauteur. La plante poussera alors de 30 cm au cours des douze mois suivants.

Dès qu'il rentre chez lui, Max taille sa plante.

1. Quelle sera la hauteur de la plante en mars 2016 avant que Max ne la taille ?
2. Pour tout entier naturel n , on note h_n la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars de l'année $(2015 + n)$.
 - a. Justifier que, pour tout entier naturel n , $h_{n+1} = 0,75h_n + 30$.
 - b. Conjecturer à l'aide de la calculatrice le sens de variations de la suite (h_n) .
Démontrer cette conjecture (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).
 - c. La suite (h_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

EXERCICE 3 (6 points)

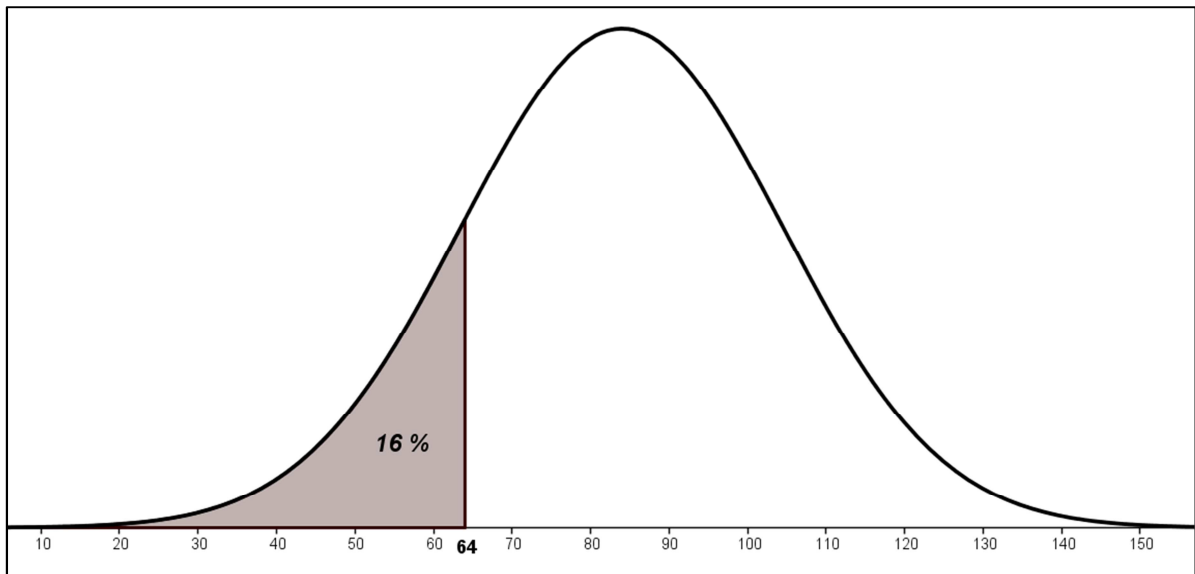
Commun à tous les candidats

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A Étude de la durée de vie d'un appareil électroménager

Des études statistiques ont permis de modéliser la durée de vie, en mois, d'un type de lave-vaisselle par une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ de moyenne $\mu = 84$ et d'écart-type σ . De plus, on a $P(X \leq 64) = 0,16$.

La représentation graphique de la fonction densité de probabilité de X est donnée ci-dessous.



1.
 - a. En exploitant le graphique, déterminer $P(64 \leq X \leq 104)$.
 - b. Quelle valeur approchée entière de σ peut-on proposer ?

2. On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \frac{X - 84}{\sigma}$.
 - a. Quelle est la loi de probabilité suivie par Z ?
 - b. Justifier que $P(X \leq 64) = P\left(Z \leq \frac{-20}{\sigma}\right)$.
 - c. En déduire la valeur de σ , arrondie à 10^{-3} .

3. Dans cette question, on considère que $\sigma = 20,1$.
Les probabilités demandées seront arrondies à 10^{-3} .
 - a. Calculer la probabilité que la durée de vie du lave-vaisselle soit comprise entre 2 et 5 ans.
 - b. Calculer la probabilité que le lave-vaisselle ait une durée de vie supérieure à 10 ans.

Partie B Étude de l'extension de garantie d'El'Ectro

Le lave-vaisselle est garanti gratuitement pendant les deux premières années.

L'entreprise El'Ectro propose à ses clients une extension de garantie de 3 ans supplémentaires.

Des études statistiques menées **sur les clients qui prennent l'extension de garantie** montrent que 11,5% d'entre eux font jouer l'extension de garantie.

1. On choisit au hasard 12 clients parmi ceux ayant pris l'extension de garantie (on peut assimiler ce choix à un tirage au hasard avec remise vu le grand nombre de clients).
 - a. Quelle est la probabilité qu'exactement 3 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie ? Détailler la démarche en précisant la loi de probabilité utilisée. Arrondir à 10^{-3} .
 - b. Quelle est la probabilité qu'au moins 6 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie ? Arrondir à 10^{-3} .
2. L'offre d'extension de garantie est la suivante : pour 65 euros supplémentaires, El'Ectro remboursera au client la valeur initiale du lave-vaisselle, soit 399 euros, **si une panne irréparable survient entre le début de la troisième année et la fin de la cinquième année**. Le client ne peut pas faire jouer cette extension de garantie si la panne est réparable.

On choisit au hasard un client parmi les clients ayant souscrit l'extension de garantie, et on note Y la variable aléatoire qui représente le gain algébrique en euros réalisé sur ce client par l'entreprise El'Ectro, grâce à l'extension de garantie.

 - a. Justifier que Y prend les valeurs 65 et -334 puis donner la loi de probabilité de Y .
 - b. Cette offre d'extension de garantie est-elle financièrement avantageuse pour l'entreprise ? Justifier.

EXERCICE 4 (5 points)

Candidat n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

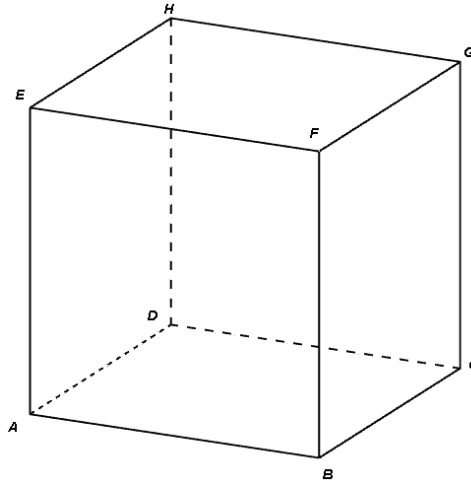
Soit un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1.

Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on considère les points M , N et P de coordonnées respectives $M\left(1; 1; \frac{3}{4}\right)$, $N\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$, $P\left(1; 0; -\frac{5}{4}\right)$.

1. Placer M , N et P sur la figure donnée en annexe page 7/7.
2. Déterminer les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{MN} et \overrightarrow{MP} .
En déduire que les points M , N et P ne sont pas alignés.
3. On considère l'algorithme 1 donné en annexe page 7/7.
 - a. Exécuter à la main cet algorithme avec les coordonnées des points M , N et P données ci-dessus.
 - b. À quoi correspond le résultat affiché par l'algorithme ? Qu'en déduire pour le triangle MNP ?
4. On considère l'algorithme 2 donné en annexe page 7/7. Le compléter pour qu'il teste et affiche si un triangle MNP est rectangle et isocèle en M .
5. On considère le vecteur $\vec{n}(5; -8; 4)$ normal au plan (MNP) .
 - a. Déterminer une équation cartésienne du plan (MNP) .
 - b. On considère la droite Δ passant par F et de vecteur directeur \vec{n} .
Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ .
6. Soit K le point d'intersection du plan (MNP) et de la droite Δ .
 - a. Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\frac{4}{7}; \frac{24}{35}; \frac{23}{35}\right)$.
 - b. On donne $FK = \sqrt{\frac{27}{35}}$.
Calculer le volume du tétraèdre $MNPF$.

ANNEXE à remettre avec la copie

EXERCICE 4 : Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



Algorithme 1

Saisir $x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P$
 d prend la valeur $x_N - x_M$
 e prend la valeur $y_N - y_M$
 f prend la valeur $z_N - z_M$
 g prend la valeur $x_P - x_M$
 h prend la valeur $y_P - y_M$
 i prend la valeur $z_P - z_M$
 k prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times i$
 Afficher k

Algorithme 2 (à compléter)

Saisir $x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P$
 d prend la valeur $x_N - x_M$
 e prend la valeur $y_N - y_M$
 f prend la valeur $z_N - z_M$
 g prend la valeur $x_P - x_M$
 h prend la valeur $y_P - y_M$
 i prend la valeur $z_P - z_M$
 k prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times i$

EXERCICE 2

[Inde 2015]

Partie A:

1. Montrons que (V_n) est géométrique de raison a :

Nous savons que:

$$\bullet \forall n \in \mathbb{N}: V_n = U_n - \frac{b}{1-a}, \quad \left(U_n = V_n + \frac{b}{1-a} \right)$$

$$\bullet \text{ donc: } \forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = U_{n+1} - \frac{b}{1-a}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi: } V_{n+1} &= (a U_n + b) - \frac{b}{1-a} \\ &= \left(a \left[V_n + \frac{b}{1-a} \right] + b \right) - \frac{b}{1-a} \\ &= a \times V_n + \frac{ab}{1-a} + \frac{b(1-a)}{1-a} - \frac{b}{1-a} \\ &\Rightarrow V_{n+1} = a \times V_n. \end{aligned}$$

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = a$ et de premier terme $V_0 = U_0 - \frac{b}{1-a}$.

Nous pouvons alors écrire: $V_n = \left(U_0 - \frac{b}{1-a} \right) \times (a)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

2. Déduisons-en la limite de la suite (U_n) :

$$V_n = U_n - \frac{b}{1-a} \Leftrightarrow U_n = V_n + \frac{b}{1-a}.$$

Dans ces conditions: $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n + \frac{b}{1-a}$.

Or: $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$, car: $a \in]-1, 1[$, et donc: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a)^n = 0$.

D'où: $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 + \frac{b}{1-a}$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{b}{1-a}$$

Au total: $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{b}{1-a}$, et nous pouvons affirmer que la suite (U_n) est convergente et converge vers $\frac{b}{1-a}$.

Donc oui si $a \in]-1, 1[$, (U_n) a pour limite $\frac{b}{1-a}$.

Partie B:

1. Déterminons la hauteur de la plante en mars 2016:

$$\begin{array}{ccccccc}
 80 \text{ cm} & - & 20 \text{ cm} & + & 30 \text{ cm} & = & 90 \text{ cm.} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \text{taille} & & \text{quart de} & & \text{pousse} & & \\
 \text{initiale} & & \text{la hauteur} & & \text{naturelle} & &
 \end{array}$$

2. a. Justifions que, pour tout entier naturel n , $h_{n+1} = 0,75 h_n + 30$:

- D'après l'énoncé, en mars 2015, la plante mesure 80 cm.

D'où: $h_0 = 80 \text{ cm}$.

- De plus, chaque année Max coupe un quart de la hauteur de la plante, soit 25%, et cette dernière pousse de 30 cm au cours des douze mois suivants.

Soient: • h_{n+1} , la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars (2015 + (n + 1)),
 • h_n , la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars (2015 + (n)).

Pour tout entier naturel n , la hauteur de la plante " h_{n+1} " est égale à sa hauteur " h_n " diminuée de 25% et augmentée de 30 cm.

Donc pour tout entier naturel n :

$$h_{n+1} = h_n - 25\% h_n + 30 \Rightarrow h_{n+1} = 0,75 \times h_n + 30.$$

2. b. Montrons par récurrence que la suite (h_n) est strictement croissante:

Les calculs faits au brouillon permettent d'affirmer que, a priori, la suite (h_n) est strictement croissante.

Nous allons ainsi montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n : $h_{n+1} > h_n$ ".

Initialisation: • $h_1 = 90 > h_0 = 80$.

Donc vrai au rang " 1 ".

• $h_2 = 0,75 \times 90 + 30 > h_1 = 90$.

Donc vrai au rang " 2 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $h_{n+1} > h_n$
 et montrons qu'alors: $h_{n+2} > h_{n+1}$.

Supposons: $h_{n+1} \geq h_n$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

$$(1) \Rightarrow 0,75 h_{n+1} > 0,75 h_n$$

$$\Rightarrow 0,75 h_{n+1} + 30 > 0,75 h_n + 30$$

$$\Rightarrow h_{n+2} > h_{n+1}.$$

Conclusion: Pour tout entier naturel n , $h_{n+1} > h_n$, ce qui revient à dire que la suite (h_n) est bien strictement croissante.

2. c. La suite (h_n) est-elle convergente ?

Nous savons que:

- $U_{n+1} = a U_n + b$

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{b}{1-a}$.

Or ici: $h_{n+1} = 0,75 h_n + 30$.

Par identification, nous pouvons poser:

$$a = 0,75 \text{ et } b = 30.$$

Dans ces conditions, nous pouvons affirmer que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = \frac{30}{1-0,75} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = 120.$$

Donc oui la suite (h_n) est convergente et converge vers 120 cm.

Cela signifie qu'au bout de " n " années (" n " très grand), la hauteur de la plante tendra vers 120 cm.