

Sujet + Corrigé

ANNALES MATHÉMATIQUES BAC S
SUITES - 2015

SUJET 5
LIBAN
BAC S - 2015

CORRECTION RÉALISÉE
PAR ALAIN PILLER



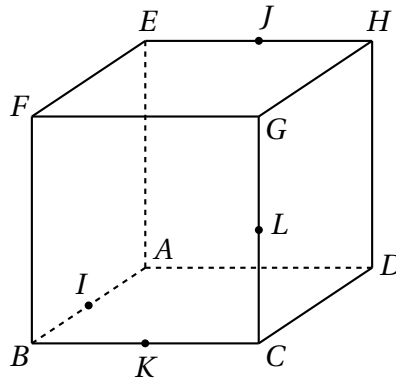
BACCALAURÉAT GÉNÉRAL**SESSION 2015****MATHÉMATIQUES****Série S****Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité****Durée de l'épreuve : 4 heures****Coefficient : 7****Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.**

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. **Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.** Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 1 (6 points)

$ABCDEFGH$ est un cube.



I est le milieu du segment $[AB]$, J est le milieu du segment $[EH]$, K est le milieu du segment $[BC]$ et L est le milieu du segment $[CG]$.

On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \vec{AB}; \vec{AD}; \vec{AE})$.

1. a) Démontrer que la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK) .
 b) En déduire une équation cartésienne du plan (IJK) .
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD) .
3. Soit M le point d'intersection de la droite (FD) et du plan (IJK) . Déterminer les coordonnées du point M .
4. Déterminer la nature du triangle IJK et calculer son aire.
5. Calculer le volume du tétraèdre $FIJK$.
6. Les droites (IJ) et (KL) sont-elles sécantes ?

Sujet Mathématiques Bac 2015
suites S - corrigé

EXERCICE 2 (6 points)

On définit la suite (u_n) de la façon suivante : pour tout entier naturel n , $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

1. Calculer $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$.
2. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$.
 b) En déduire la valeur exacte de u_1 .
3. a) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il affiche en sortie le terme de rang n de la suite (u_n) où n est un entier naturel saisi en entrée par l'utilisateur.

Variables : i et n sont des entiers naturels
 u est un réel

Entrée : Saisir n

Initialisation : Affecter à u la valeur ...

Traitement : Pour i variant de 1 à ...
 | Affecter à u la valeur ...
 Fin de Pour

Sortie : Afficher u

b) À l'aide de cet algorithme, on a obtenu le tableau de valeurs suivant :

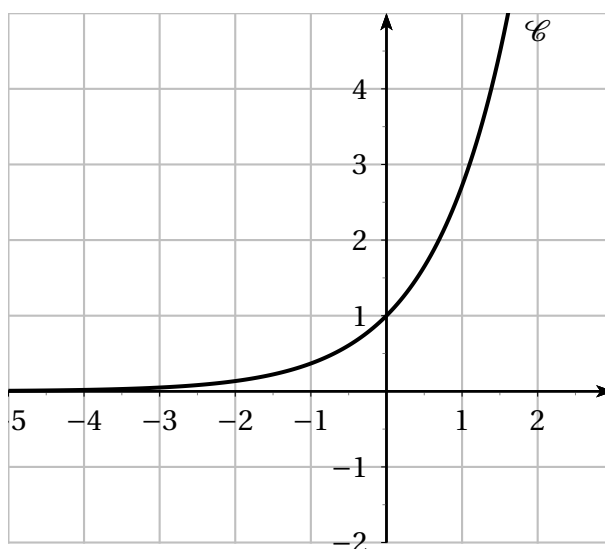
n	0	1	2	3	4	5	10	50	100
u_n	0,6931	0,3069	0,1931	0,1402	0,1098	0,0902	0,0475	0,0099	0,0050

Quelles conjectures concernant le comportement de la suite (u_n) peut-on émettre ?

4. a) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
b) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
5. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) . Démontrer que $\ell = 0$.

EXERCICE 3 (3 points)

On considère la courbe \mathcal{C} d'équation $y = e^x$, tracée ci-dessous.



Pour tout réel m strictement positif, on note \mathcal{D}_m la droite d'équation $y = mx$.

1. Dans cette question, on choisit $m = e$.
Démontrer que la droite \mathcal{D}_e , d'équation $y = ex$, est tangente à la courbe \mathcal{C} en son point d'abscisse 1.
2. Conjecturer, selon les valeurs prises par le réel strictement positif m , le nombre de points d'intersection de la courbe \mathcal{C} et de la droite \mathcal{D}_m .
3. Démontrer cette conjecture.

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats n’ayant pas suivi l’enseignement de spécialité

En prévision d’une élection entre deux candidats A et B, un institut de sondage recueille les intentions de vote de futurs électeurs.

Parmi les 1200 personnes qui ont répondu au sondage, 47 % affirment vouloir voter pour le candidat A et les autres pour le candidat B.

Compte-tenu du profil des candidats, l’institut de sondage estime que 10 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat A ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat B, tandis que 20 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat B ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat A.

On choisit au hasard une personne ayant répondu au sondage et on note :

- A l’événement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat A » ;
- B l’événement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat B » ;
- V l’événement « La personne interrogée dit la vérité ».

1. Construire un arbre de probabilités traduisant la situation.
2. **a)** Calculer la probabilité que la personne interrogée dise la vérité.
 b) Sachant que la personne interrogée dit la vérité, calculer la probabilité qu’elle affirme vouloir voter pour le candidat A.
3. Démontrer que la probabilité que la personne choisie vote effectivement pour le candidat A est 0,529.
4. L’institut de sondage publie alors les résultats suivants :

52,9 % des électeurs* voteraient pour le candidat A.
 * estimation après redressement, fondée sur un sondage d’un échantillon représentatif de 1200 personnes.

Au seuil de confiance de 95 %, le candidat A peut-il croire en sa victoire ?

5. Pour effectuer ce sondage, l’institut a réalisé une enquête téléphonique à raison de 10 communications par demi-heure. La probabilité qu’une personne contactée accepte de répondre à cette enquête est 0,4.
 L’institut de sondage souhaite obtenir un échantillon de 1200 réponses.
 Quel temps moyen, exprimé en heures, l’institut doit-il prévoir pour parvenir à cet objectif ?

EXERCICE 2

[Liban 2015]

1. Calculons U_0 :

$$\text{Ici: } f(x) = \frac{1}{1+x} \text{ et } U_0 = \int_0^1 f(x) dx.$$

f est continue sur $[0;1]$, elle admet donc des primitives sur $[0;1]$ et par conséquent: U_0 existe.

$$U_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \Leftrightarrow U_0 = [\ln |1+x|]_0^1$$

$$\Leftrightarrow U_0 = [\ln(1+x)]_0^1$$

$$\Rightarrow U_0 = \ln 2.$$

Au total: $U_0 = \ln 2$.

2. a. Montrons que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} + U_n = \frac{1}{n+1}$:

Cela revient à calculer:

$$j = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx,$$

$$\Leftrightarrow j = \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1} + x^n}{1+x} \right) dx.$$

$$\text{Soit: } h(x) = \frac{x^{n+1} + x^n}{1+x}.$$

h est continue sur $[0;1]$, elle admet donc des primitives sur $[0;1]$ et par conséquent: j existe.

Dans ces conditions:

$$j = \int_0^1 \left(\frac{x^n (x+1)}{1+x} \right) dx \Rightarrow j = \int_0^1 x^n dx.$$

$$\text{D'où: } j = \left[\frac{x^{(n+1)}}{(n+1)} \right]_0^1 \Rightarrow j = \frac{1}{n+1}.$$

Au total, nous avons donc bien: $U_{n+1} + U_n = \frac{1}{n+1}$, pour tout entier naturel n .

2. b. Déduisons-en la valeur exacte de U_1 :

Nous savons que: $U_{n+1} + U_n = \frac{1}{n+1}$, et $U_0 = \ln 2$.

$$\begin{aligned} \text{D'où: } U_1 + U_0 &= \frac{1}{0+1} \Leftrightarrow U_1 + \ln 2 = 1 \\ &\Rightarrow U_1 = 1 - \ln 2. \end{aligned}$$

Au total: $U_1 = 1 - \ln 2$.

3. a. Recopions et complétons:

Le tableau recopié et complété est le suivant:

<p>⋮</p> <p>Initialisation: Affecter à u la valeur $\ln(2)$</p> <p>Traitement: Pour i variant de 1 à n</p> <div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px; margin-left: 40px;"> <p>Affecter à u la valeur $\frac{1}{i} - u$</p> </div> <p>⋮</p>

3. b. Quelle conjecture ?

D'après les données du tableau, on pourrait, a priori, penser que la suite: (U_n) est strictement décroissante.

Par ailleurs, (U_n) semble positive et converger vers "0" (minorant).

4. a. Montrons que (U_n) est décroissante:

Il s'agit de déterminer le signe de: $U_{n+1} - U_n$.

Posons: $g(x) = \frac{x^{n+1}}{1+x}$ et $h(x) = \frac{x^n}{1+x}$.

Nous remarquons alors que: $g(x) = x \times h(x)$.

Or: $x \in [0;1]$, d'où nous pouvons affirmer que:

$$g(x) \leq h(x) \iff \frac{x^{n+1}}{1+x} \leq \frac{x^n}{1+x}.$$

Notons que: • les fonctions g et h sont continues sur $[0;1]$;

• g et h admettent donc des primitives sur $[0;1]$, et par conséquent: $\int_0^1 g(x) dx$ et $\int_0^1 h(x) dx$ existent ;

• de plus, les fonctions g et h sont positives sur $[0;1]$;

• enfin, les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant.

Les conditions étant réunies:

$$0 \leq \frac{x^{n+1}}{1+x} \leq \frac{x^n}{1+x} \iff 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$

$$\iff 0 \leq U_{n+1} \leq U_n$$

$$\implies 0 \leq U_{n+1} - U_n \leq 0.$$

Ainsi, nous pouvons affirmer que: la suite (U_n) est décroissante.

4. b. Démontrons que (U_n) est convergente:

Nous savons que toute suite décroissante et minorée est convergente.

- Or ici:
- (U_n) est minorée par $m = 0$, (car: $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq 0$)
 - (U_n) est décroissante, pour tout entier naturel n .

Donc nous pouvons affirmer que: (U_n) est convergente.

5. Soit l la limite de (U_n) , montrons que $l = 0$:

Soit l la limite de (U_n) , quand n tend vers $+\infty$.

Nous avons:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l \\ \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1} = l \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n + U_{n+1} = 2l.$$

Or, nous avons vu que: $U_n + U_{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

$$\begin{aligned} \text{D'où: } \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n + U_{n+1}) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons l'égalité:

$$2l = 0 \Rightarrow l = 0.$$

Donc si l est la limite de (U_n) , nous avons bien: $l = 0$.