Bac Mathématiques
Série S - 2016

Intégrales

TOUS LES EXERCICES
POUR AVOIR 20/20
– C'EST CADEAU ! –

alainpiller.fr

1

ALAIN PILLER

PRIMITIVES, INTÉGRALES

Rien de plus facile !

BAC MATHS

TERM. S

SAVOIR

TRAINING

INTÉRROS LYCÉES

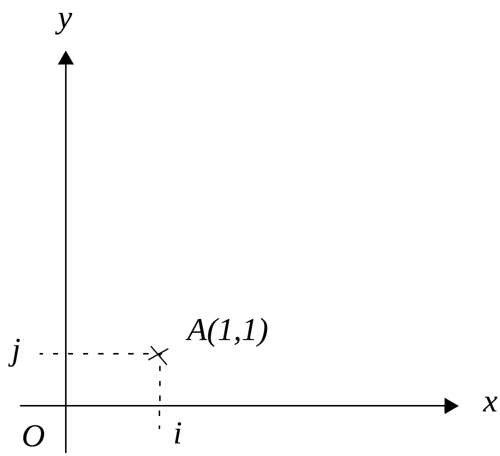
EXOS ANNALES BAC

PREMIUM ÉDITEUR

SAVOIR

A Unité d'aire

Dans un repère orthogonal $(O; \overrightarrow{Oi}, \overrightarrow{Oj})$, **l'unité d'aire (u.a.)**, est l'aire du rectangle $(OiAj)$ avec $A(1, 1)$.



B Primitive de f

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

On appelle **primitive de f** sur I toute fonction F dérivable sur I telle que : $\boldsymbol{F' = f}$.

- Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, qui admet une primitive G sur I. Alors, f admet une infinité de primitives sur I et toute primitive F de f sur I est : $\boldsymbol{F(x) = G(x) + c, c \in \mathbb{R}}$.
- Pour x_o et y_o fixés, il existe une unique primitive F de f avec : $F(x_o) = y_o$.
- Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives.

C Intégrale d'une fonction continue

• Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$ et ζ sa courbe représentative dans le repère orthogonal $(O; \overrightarrow{Oi}, \overrightarrow{Oj})$.

L'intégrale de "*a*" à "*b*" de *f* est l'aire $\mathcal{A}$ du domaine situé sous la courbe ζ :

$$\boldsymbol{\mathcal{A} = \int_a^b f(x)dx}.$$

• Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, soit F une primitive de f :

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}.$$

D Valeur moyenne

Pour toute fonction f continue sur $I = [a, b]$, la valeur moyenne de f sur $[a, b]$ est le réel m tel que : $\boldsymbol{m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx}$.

E Propriétés de l'intégrale

1. Si f est intégrable sur $[-a, a]$ et si f est une fonction paire $(\boldsymbol{f(-x) = f(x)})$

alors : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

2. Si f est intégrable sur $[-a, a]$ et si f est une fonction impaire $(\boldsymbol{f(-x) = -f(x)})$

alors : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

③. Si f est intégrable sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, alors : $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

④. Nous avons : $\int_a^a f(x)dx = 0$

⑤. Si f est intégrable sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, alors :

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx,\ c \in [a, b].$$

C'est ce qu'on appelle la **relation de CHASLES**.

⑥. Si f et g sont intégrables sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, alors :

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

⑦. Si f est intégrable sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, alors :

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda\int_a^b f(x)dx,\ \forall\lambda \in \mathbb{R}.$$

⑧. Si f et g sont intégrables sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, alors :

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)dx = \lambda\int_a^b f(x)dx + \mu\int_a^b g(x)dx,\ \forall\lambda \text{ et } \mu \in \mathbb{R}.$$

⑨. Soient f et g intégrables sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$;

on suppose : $\forall x \in [a, b]$ si $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

⑩. Si f est intégrable sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, alors :

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

F Tableau des différentes primitives

Tableau 1 :

f	F	I
K	$K \cdot x$	$\mathbb{R}$
x^n $(n \neq 0$ et $n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	· $\mathbb{R}$ si $n > 0$ · $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ si $n < -1$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$
$\dfrac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$	$\dfrac{-1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(x)$	$]0, +\infty[$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$	$]0, +\infty[$

Tableau 2 :

f	F	*Conditions*
$K \cdot u'$	$K \cdot u$	-
$u' + v'$	$u + v$	-
$u' \cdot u^{n}$ $(n \neq 0 \text{ et } n \neq -1)$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	▪ Si $n < -1$ ▪ u ne s'annule pas sur I
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	u strictement positive sur I
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(u)$	u strictement positive sur I
$\dfrac{u'}{u^{2}}$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$	$\dfrac{-1}{u}$	$u \neq 0$ sur I
$u'e^{u}$	e^{u}	-
$\sin(ax+b)$	$\dfrac{-1}{a}\cos(ax+b)$	-
$\cos(ax+b)$	$\dfrac{1}{a}\sin(ax+b)$	-

Avec **:**

- u **et** v **dérivables sur** I
- $a, b \in \mathbb{R}$ **et** $a \neq 0$

TRAINING

TRAINING 1

A

Déterminer une primitive *F* sur *I* de la fonction *f* dans les cas suivants :

1 $f(x) = 3$ avec $I = \mathbb{R}$.

2 $f(x) = 7x$ avec $I = \mathbb{R}$.

3 $f(x) = 3x^2 + 7x + 3$ avec $I = \mathbb{R}$.

4 $f(x) = \frac{1}{x} + 10$ avec $I =]0, +\infty[$.

5 $f(x) = \frac{1}{x^2} + 7x + 10$ avec $I = \mathbb{R}^*$.

6 $f(x) = 3\sqrt{x} + 21x$ avec $[0, +\infty[$.

7 $f(x) = xe^{x^2}$ avec $I = \mathbb{R}$.

8 $f(x) = 6xe^{(x^2+1)}$ avec $I = \mathbb{R}$.

9 $f(x) = 2e^{(3x-2)}$;; avec $I = \mathbb{R}$.

10 $f(x) = \frac{4x}{2x^2+4}$ avec $I = \mathbb{R}$.

11 $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+3}$ avec $I = \mathbb{R}$.

12 $f(x) = \frac{8x}{1-x^2}$ avec $I =]-1, 1[$.

13 $f(x) = \frac{4}{(2x-1)^4}$ avec $I =]\frac{1}{2}, +\infty[$.

CORRECTION

1 Calculons une primitive de f sur $\mathbb{R}$:

$f(x) = 3$ et $I = \mathbb{R}$

D'où : f est continue sur $I = \mathbb{R}$, elle admet donc une primitive sur $\mathbb{R}$ cad une fonction F dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $F' = f$.

Ici : $\boxed{\boldsymbol{F(x) = 3x}}$ et nous avons bien $F'(x) = 3$.

2 Calculons une primitive de f sur $\mathbb{R}$:

$f(x) = 7x$ et $I = \mathbb{R}$.

D'où : f est continue sur $I = \mathbb{R}$, elle admet donc une primitive sur $\mathbb{R}$ cad une fonction F dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $F' = f$.

Ici : $\boxed{\boldsymbol{F(x) = \frac{7}{2}x^2}}$ et nous avons bien $F'(x) = 7x$.

3 Calculons une primitive de f sur $\mathbb{R}$:

$f(x) = 3x^2 + 7x + 3$ et $I = \mathbb{R}$.

D'où : f est continue sur $I = \mathbb{R}$, elle admet donc une primitive sur $\mathbb{R}$ cad une fonction F dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $F' = f$.

Ici : $\boxed{\boldsymbol{F(x) = x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 3x}}$ et nous avons bien $F'(x) = 3x^2 + 7x + 3$.

4 Calculons une primitive de f sur $]0, +\infty[$:

$f(x) = \frac{1}{x} + 10$ et $I =]0, +\infty[$.

D'où : f est continue sur $I =]0, +\infty[$, elle admet donc une primitive sur $]0, +\infty[$ cad une fonction F dérivable sur $]0, +\infty[$ avec $F' = f$.

Ici : $\boxed{\boldsymbol{F(x) = \ln(x) + 10x}}$ et nous avons bien $F'(x) = \frac{1}{x} + 10$.

5 Calculons une primitive de f sur $\mathbb{R}^*$:

$f(x) = \frac{1}{x^2} + 7x + 10$ et $I = \mathbb{R}^*$.

D'où : f est continue sur $I = \mathbb{R}^*$, elle admet donc une primitive sur $\mathbb{R}^*$ cad une fonction F dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec $F' = f$.

Ici : $\boxed{\boldsymbol{F(x) = \frac{-1}{x} + \frac{7}{2}x^2 + 10x}}$ et nous avons bien $F'(x) = \frac{1}{x^2} + 7x + 10$.

6 Calculons une primitive de f sur $[0, +\infty[$:

$f(x) = 3\sqrt{x} + 21x$ et $I = [0, +\infty[$.

D'où : f est continue sur $I = [0, +\infty[$, elle admet donc une primitive sur $]0, +\infty[$ cad une fonction F dérivable sur $[0, +\infty[$ avec $F' = f$.

Ici : $\boxed{\boldsymbol{F(x) = 2x^{3/2} + \frac{21}{2}x^2}}$ et nous avons bien $F'(x) = 3\sqrt{x} + 21x$.

7 Calculons une primitive de f sur $\mathbb{R}$:

$f(x) = xe^{x^2}$ et $I = \mathbb{R}$.

D'où : f est continue sur $I = \mathbb{R}$, elle admet donc une primitive sur $\mathbb{R}$ cad une fonction F dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $F' = f$.

Ici : $\boxed{\boldsymbol{F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}}}$ et nous avons bien $F'(x) = xe^{x^2}$. $(\boldsymbol{u'e^u})$

8 Calculons une primitive de f sur $\mathbb{R}$:

$f(x) = 6xe^{(x^2+1)}$ avec $I = \mathbb{R}$.

D'où : f est continue sur $I = \mathbb{R}$, elle admet donc une primitive sur $\mathbb{R}$ cad une fonction F dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $F' = f$.

Ici : $\boxed{\boldsymbol{F(x) = 3\ e^{(x^2+1)}}}$ et nous avons bien $F'(x) = 6xe^{(x^2+1)}$. $(\boldsymbol{u'e^u})$

9 Calculons une primitive de f sur $\mathbb{R}$:

$f(x) = 2e^{(3x-2)}$ avec $I = \mathbb{R}$.

D'où : f est continue sur $I = \mathbb{R}$, elle admet donc une primitive sur $\mathbb{R}$ cad une fonction F dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $F' = f$.

Ici : $\boxed{\boldsymbol{F(x) = \frac{2}{3}\ e^{(3x-2)}}}$ et nous avons bien $F'(x) = 2e^{(3x-2)}$. $(\boldsymbol{u'e^u})$

10 Calculons une primitive de f sur $\mathbb{R}$:

$f(x) = \dfrac{4x}{2x^2 + 4}$ avec $I = \mathbb{R}$.

D'où : f est continue sur $I = \mathbb{R}$, elle admet donc une primitive sur $\mathbb{R}$ cad une fonction F dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $F' = f$.

Ici : $\boxed{\boldsymbol{F(x) = \ln(2x^2 + 4)}}$ et nous avons bien $F'(x) = \dfrac{4x}{2x^2 + 4}$. $\left(\dfrac{\boldsymbol{u'}}{\boldsymbol{u}}\right)$

11 Calculons une primitive de f sur $\mathbb{R}$:

$f(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 + x + 3}$ avec $I = \mathbb{R}$.

D'où : f est continue sur $I = \mathbb{R}$, elle admet donc une primitive sur $\mathbb{R}$ cad une fonction F dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $F' = f$.

Ici : $\boxed{\boldsymbol{F(x) = \ln(x^2 + x + 3)}}$ et nous avons bien $F'(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 + x + 3}$. $\left(\dfrac{\boldsymbol{u'}}{\boldsymbol{u}}\right)$

12 Calculons une primitive de f sur $]-1, 1[$:

$f(x) = \dfrac{8x}{1 - x^2}$ avec $I =]-1, 1[$.

D'où : f est continue sur $I =]-1, 1[$, elle admet donc une primitive sur $]-1, 1[$ cad une fonction F dérivable sur $]-1, 1[$ avec $F' = f$.

Ici : $\boxed{\boldsymbol{F(x) = -4\ln(1 - x^2)}}$ et nous avons bien $F'(x) = \dfrac{8x}{1 - x^2}$. $\left(\dfrac{\boldsymbol{u'}}{\boldsymbol{u}}\right)$

13 Calculons une primitive de f sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$:

$f(x) = \dfrac{4}{(2x - 1)^4}$ et $I =]\dfrac{1}{2}, +\infty[$.

D'où : f est continue sur $I =]\dfrac{1}{2}, +\infty[$, elle admet donc une primitive sur $]\dfrac{1}{2}, +\infty[$ cad une fonction F dérivable sur $]\dfrac{1}{2}, +\infty[$ avec $F' = f$.

Ici : $\boxed{\boldsymbol{F(x) = \frac{-2}{3(2x-1)^3}}}$ et nous avons bien $F'(x) = \dfrac{4}{(2x-1)^4}$. ($\boldsymbol{u'u^n}$ **avec** $\boldsymbol{n = -3}$)

B

Déterminer les primitives sur *I* des fonctions *f* suivantes :

1 $f_1(x) = \dfrac{1}{7x+3}$ sur $I = [3, 10]$.

2 $f_2(x) = 3(7x-1)^5$ sur $I = \mathbb{R}$.

3 $f_3(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}$ sur $I =]0, +\infty[$.

CORRECTION

1 Déterminons $\boldsymbol{F_1}$ sur $\boldsymbol{[3, 10]}$:

f_1 est continue sur $I = [3, 10]$, elle admet donc une primitive sur $[3, 10]$ cad une fonction F_1 dérivable sur $[3, 10]$ avec $F'_1 = f_1$.

Ici : $\boxed{\boldsymbol{F_1(x) = \frac{\ln(7x+3)}{7}}}$. $\left(\boldsymbol{\frac{u'}{u}}\right)$

Dans ces conditions toutes les primitives sur $[3, 10]$ de f_1 sont :

$$G_1(x) = F_1(x) + c \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{G_1(x) = \frac{\ln(7x+3)}{7} + c, c \in \mathbb{R}}}.$$

Par exemple nous avons :

$$G_1(x) = \frac{\ln(7x+3)}{7} + 4,$$

$$G_1(x) = \frac{\ln(7x+3)}{7} - 6,$$

$$G_1(x) = \frac{\ln(7x+3)}{7} + 69 \text{ etc...}$$

2 **Déterminons F_2 sur $\mathbb{R}$:**

f_2 est continue sur $I = \mathbb{R}$, elle admet donc une primitive sur $\mathbb{R}$ cad une fonction F_2 dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $F'_2 = f_2$.

Ici : $\boxed{\boldsymbol{F_2(x) = \frac{1}{14}(7x-1)^6}}$.$(u'u^n)$

Dans ces conditions toutes les primitives sur $\mathbb{R}$ de f_2 sont :

$$G_2(x) = F_2(x) + c \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{G_2(x) = \frac{(7x-1)^6}{14} + c, c \in \mathbb{R}}}.$$

3 **Déterminons F_3 sur $]0, +\infty[$:**

f_3 est continue sur $I =]0, +\infty[$, elle admet donc une primitive sur $]0, +\infty[$ cad une fonction F_3 dérivable sur $]0, +\infty[$ avec $F'_3 = f_3$.

Ici : $\boxed{\boldsymbol{F_3(x) = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x^2}}}$.

Dans ces conditions toutes les primitives sur $]0, +\infty[$ de f_3 sont :

$$G_3(x) = F_3(x) + c \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{G_3(x) = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x^2} + c, c \in \mathbb{R}}}.$$

C

Pour les fonctions suivantes, démontrer que F est une primitive sur un intervalle I (à préciser), et déterminer la primitive de f qui s'annule en $x = x_0$:

1 $f(x) = 3xe^x$, $F(x) = 3xe^x - 3e^x$, $x_0 = 1$.

2 $f(x) = e^x - \frac{1}{x}$, $F(x) = e^x - \ln(x)$, $x_0 = 3$.

3 $f(x) = \cos(3x+2)+4$, $F(x) = \frac{1}{3}\sin(3x+2)+4x, x_0 = \pi$.

CORRECTION

1 ⓐ. **Démontrons que F est une primitive de f sur I :**

$I = \mathbb{R}$.

Ici : f est continue sur $I = \mathbb{R}$. Elle admet donc une primitive F dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $F' = f$.

$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = 3e^x + 3xe^x - 3e^x \Rightarrow F'(x) = 3xe^x$.

D'où on a bien : $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Par conséquent, F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

ⓑ. **Déterminons la primitive de f qui s'annule en $x = 1$:**

Il s'agit de déterminer $c \in \mathbb{R}$ telle que : $G(1) = 0 \Leftrightarrow F(1)+c = 0$.

$F(1)+c = 0 \Leftrightarrow (3e-3e)+c = 0 \Rightarrow \boxed{c = 0}$.

Au total, la primitive de f qui s'annule en $x = 1$ est : $\boxed{F(x) = 3xe^x - 3e^x}$.

2 ⓐ. **Démontrons que F est une primitive de f sur I :**

$I =]0, +\infty[$.

Ici : f est continue sur $I =]0, +\infty[$. Elle admet donc une primitive F dérivable sur $]0, +\infty[$ telle que : $F' = f$.

$\forall x \in]0, +\infty[, F'(x) = e^x - \frac{1}{x}$.

D'où on a bien : $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in]0, +\infty[$.

Par conséquent, F est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.

ⓑ. **Déterminons la primitive de f qui s'annule en $x = 3$:**

Il s'agit de déterminer $c \in \mathbb{R}$ telle que : $G(3) = 0 \Leftrightarrow F(3)+c = 0$.

$F(3)+c = 0 \Leftrightarrow (e^3 - \ln 3)+c = 0 \Rightarrow \boxed{c = \ln(3) - e^3}$.

Au total, la primitive de f qui s'annule en $x = 3$ est :

$$\boxed{\boldsymbol{F(x) = e^{x} - \ln(x) + (\ln(3) - e^{3})}}.$$

3 ⓐ. **Démontrons que F est une primitive de f sur I :**

$I = \mathbb{R}$.

Ici : f est continue sur $I = \mathbb{R}$. Elle admet donc une primitive F dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $F' = f$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \frac{1}{3} \times 3\cos(3x+2) + 4 \Leftrightarrow F'(x) = \cos(3x+2) + 4$.

D'où on a bien : $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Par conséquent, F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

ⓑ. **Déterminons la primitive de f qui s'annule en $x = \pi$:**

Il s'agit de déterminer $c \in \mathbb{R}$ telle que : $G(\pi) = 0 \Leftrightarrow F(\pi) + c = 0$.

$$F(\pi) + c = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\sin(3\pi+2)}{3} + 4\pi\right) + c = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{c = -\left[\frac{\sin(3\pi+2)}{3} + 4\pi\right]}}.$$

Au total, la primitive de f qui s'annule en $x = \pi$ est :

$$\boxed{\boldsymbol{F(x) = \frac{1}{3}\sin(3x+2) + 4x - \left[\frac{\sin(3\pi+2)}{3} + 4\pi\right]}}.$$

TRAINING 2

Calculer les intégrales suivantes :

1 $I_1 = \int_0^1 (x+3)dx$.

2 $I_2 = \int_3^6 (x^2+6)dx$.

3 $I_3 = \int_1^2 (x-3)(x-9)dx$.

4 $I_4 = \int_0^1 (3x^{1/2} - 6x)dx$.

5 $I_5 = \int_0^3 (\sqrt{2x} + x^{1/3})dx$.

6 $I_6 = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^3}$.

7 $I_7 = \int_1^2 \frac{dx}{3x^2}$.

8 $I_8 = \int_1^2 \left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$.

9 $I_9 = \int_0^1 \frac{dx}{x+2}$.

10 $I_{10} = \int_3^6 e^x(e^x+3)dx$.

11 $I_{11} = \int_{-1}^3 x|x|dx$.

12 $I_{12} = \int_2^0 \sqrt{|1-x|}dx$.

13 $I_{13} = \int_{-1}^1 (x^2 - \sqrt{|x|})\sqrt[3]{x^2}dx$.

14 $I_{14} = \int_{-2}^{2} (x^3 - \sqrt[3]{x})x^2 dx$.

15 $I_{15} = \int_{-1}^{1} e^{(-2x+1)} dx$.

CORRECTION

1 Calculons l'intégrale définie I_1 :

Nous savons que :

$$I_1 = \int_0^1 (x+3)dx \qquad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_1 = \int_0^1 x dx + \int_0^1 3 dx \qquad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_1 = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + [3x]_0^1 \qquad (c)$$

$$(c) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_1 = \frac{7}{2}}}.$$

2 Calculons l'intégrale définie I_2 :

Nous savons que :

$$I_2 = \int_3^6 (x^2+6)dx \qquad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_2 = \int_3^6 x^2 dx + \int_3^6 6 dx \qquad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_2 = \left[\frac{x^3}{3}\right]_3^6 + [6x]_3^6 \qquad (c)$$

$$(c) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_2 = 81}}.$$

3 Calculons l'intégrale définie I_3 :

Nous savons que :

$$I_3 = \int_1^2 (x-3)(x-9)dx \qquad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_3 = \int_1^2 (x^2 - 12x + 27)dx \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_3 = \int_1^2 x^2 dx + \int_1^2 (-12x)dx + \int_1^2 27dx \quad (c)$$

$$(c) \Leftrightarrow I_3 = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 + [-6x^2]_1^2 + [27x]_1^2 \quad (d)$$

$$(d) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_3 = \frac{34}{3}}}.$$

4 Calculons l'intégrale définie I_4 :

Nous savons que :

$$I_4 = \int_0^1 (3x^{1/2} - 6x)dx \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_4 = \int_0^1 3x^{1/2}dx + \int_0^1 (-6x)dx \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_4 = [2x^{3/2}]_0^1 + [-3x^2]_0^1 \quad (c)$$

$$(c) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_4 = -1}}.$$

5 Calculons l'intégrale définie I_5 :

Nous savons que :

$$I_5 = \int_0^3 (\sqrt{2x} + x^{1/3})dx \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_5 = \int_0^3 \sqrt{2x}dx + \int_0^3 x^{1/3}dx \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_5 = \int_0^3 (2x)^{1/2}dx + \int_0^3 x^{1/3}dx \quad (c)$$

$$(c) \Leftrightarrow I_5 = 2^{1/2}\int_0^3 x^{1/2}dx + \int_0^3 x^{1/3}dx \quad (d)$$

$$(d) \Leftrightarrow I_5 = 2^{1/2}\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^3 + \left[\frac{3}{4}x^{4/3}\right]_0^3 \quad (e)$$

$$(e) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_5 = 2\sqrt{6} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{81}}}.$$

6 Calculons l'intégrale définie I_6 :

Nous savons que :

$$I_6 = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^3} \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_6 = \int_{-1}^{0} x^{-3} dx \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_6 = \left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right]_{-1}^{0} \quad (c)$$

$$(c) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_6 = \frac{1}{2}}}.$$

7 Calculons l'intégrale définie I_7 :

Nous savons que :

$$I_7 = \int_{1}^{2} \frac{dx}{3x^2} \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_7 = \int_{1}^{2} \frac{x^{-2}}{3} dx \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_7 = \left[-\frac{x^{-1}}{3}\right]_{1}^{2} \quad (c)$$

$$(c) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_7 = \frac{1}{6}}}.$$

8 Calculons l'intégrale définie I_8 :

Nous savons que :

$$I_8 = \int_{1}^{2} \left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_8 = \int_{1}^{2} x dx + \int_{1}^{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_8 = \int_{1}^{2} x dx + \int_{1}^{2} (-x^{-1/2}) dx \quad (c)$$

$$(c) \Leftrightarrow I_8 = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{1}^{2} + [-2x^{1/2}]_1^2 \quad (d)$$

$(d) \Rightarrow \boxed{I_8 = \frac{7}{2} - 2\sqrt{2}}$.

9 Calculons l'intégrale définie I_9 :

Nous savons que :

$$I_9 = \int_0^1 \frac{dx}{x+2} \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_9 = [\mathrm{Log}|x+2|]_0^1 \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_9 = [\mathrm{Log}(|x+2|)]_0^1 \quad (c)$$

$$(c) \Rightarrow \boxed{I_9 = \mathrm{Log}3 - \mathrm{Log}2}.$$

10 Calculons l'intégrale définie I_{10} :

Nous savons que :

$$I_{10} = \int_3^6 e^x(e^x+3)dx \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_{10} = \int_3^6 (e^{2x}+3e^x)dx \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_{10} = \int_3^6 e^{2x}dx + \int_3^6 3e^x dx \quad (c)$$

$$(c) \Leftrightarrow I_{10} = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_3^6 + [3e^x]_3^6 \quad (d)$$

$$(d) \Rightarrow \boxed{I_{10} = \frac{1}{2}e^{12} + \frac{5}{2}e^6 - 3e^3}.$$

11 Calculons l'intégrale définie I_{11} :

Nous savons que :

$$I_{11} = \int_{-1}^3 x|x|dx \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_{11} = \int_{-1}^0 x(-x)dx + \int_0^3 x(x)dx \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_{11} = \int_{-1}^0 -x^2 dx + \int_0^3 x^2 dx \quad (c)$$

$$(c) \Leftrightarrow I_{11} = \left[\frac{-x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{3} \quad (d)$$

$$(d) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_{11} = \frac{26}{3}}}.$$

12 Calculons l'intégrale définie I_{12} :

Nous savons que :

$$I_{12} = \int_{2}^{0} \sqrt{|1-x|}\,dx \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_{12} = \int_{2}^{0} (|1-x|)^{1/2} dx \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_{12} = \int_{2}^{1} (x-1)^{1/2} dx + \int_{1}^{0} (1-x)^{1/2} dx \quad (c)$$

$$(c) \Leftrightarrow I_{12} = \left[\frac{2}{3}(x-1)^{3/2}\right]_{2}^{1} + \left[-\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\right]_{1}^{0} \quad (d)$$

$$(d) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_{12} = -\frac{4}{3}}}.$$

13 Calculons l'intégrale définie I_{13} :

Nous savons que :

$$I_{13} = \int_{-1}^{1} (x^2 - \sqrt{|x|})\sqrt[3]{x^2}\,dx \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_{13} = \int_{-1}^{1} (x^2 - (|x|)^{1/2})x^{2/3} dx \quad (b).$$

Or la fonction $f(x) = (x^2 - (|x|)^{1/2})x^{2/3}$ est une fonction paire, d'où :

$$(b) \Leftrightarrow I_{13} = 2\int_{0}^{1} (x^2 - (|x|)^{1/2})\, x^{2/3} dx \quad (c)$$

$$(c) \Leftrightarrow I_{13} = 2\int_{0}^{1} (x^2 - x^{1/2})\, x^{2/3} dx \quad (d)$$

$$(d) \Leftrightarrow I_{13} = 2\int_{0}^{1} (x^{8/3} - x^{7/6})\, dx \quad (e)$$

$$(e) \Leftrightarrow I_{13} = 2\int_0^1 x^{8/3}dx + 2\int_0^1 (-x^{7/6})dx \quad (f)$$

$$(f) \Leftrightarrow I_{13} = 2\left[\frac{3}{11}x^{11/3}\right]_0^1 + 2\left[-\frac{6}{13}x^{13/6}\right]_0^1 \quad (g)$$

$$(g) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_{13} = -\frac{54}{143}}}.$$

14 Calculons l'intégrale définie I_{14} :

Nous savons que :

$$I_{14} = \int_{-2}^{2} (x^3 - \sqrt[3]{x})\ x^2 dx \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_{14} = \int_{-2}^{2} (x^3 - x^{1/3})\ x^2 dx \quad (b)$$

Or la fonction $f(x) = (x^3 - x^{1/3})x^2$ est une fonction impaire, d'où :

$$(b) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_{14} = 0}}.$$

15 Calculons l'intégrale définie I_{15} :

Nous savons que :

$$I_{15} = \int_{-1}^{1} e^{(-2x+1)}dx \quad (a).$$

Or la fonction $f(x) = e^{(-2x+1)}$ n'est ni une fonction paire, ni une fonction impaire,

d'où : $(a) \Leftrightarrow I_{15} = \left[-\frac{1}{2}e^{(-2x+1)}\right]_{-1}^{1} \quad (b)$

$$(b) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_{15} = -\frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}e^{3}}}.$$

TRAINING 3

Une intégrale indéfinie est une intégrale sans borne d'intégration.

Ainsi : $\int f(x)dx = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$.

Calculer les intégrales indéfinies suivantes :

1 $I_1 = \int(3x^2 + 9)dx$.

2 $I_2 = \int(\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{2x})dx$.

3 $I_3 = \int\left(\frac{1}{x^4} + 10\right)dx$.

4 $I_4 = \int\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)dx$.

5 $I_5 = \int a^x dx,\ a \in R_+^* - \{-1\}$.

6 $I_6 = \int(e^{x/a} + e^{-x/a})^2 dx,\ a \in R^*$.

CORRECTION

1 Calculons l'intégrale indéfinie I_1 :

Nous savons que :

$$I_1 = \int(3x^2 + 9)dx \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_1 = \int 3x^2 dx + \int 9dx \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_1 = [x^3] + [9x] \quad (c)$$

$(c) \Rightarrow \boxed{I_1 = x^3 + 9x + c}$, c étant une constante.

2 **Calculons l'intégrale indéfinie I_2 :**

Nous savons que :

$$I_2 = \int (\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{2x})dx \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_2 = \int (x^{1/2} - 3(2x)^{1/3})dx \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_2 = \int x^{1/2}dx + (-3)2^{1/3}\int x^{1/3}dx \quad (c)$$

$$(c) \Leftrightarrow I_2 = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right] + (-3)2^{1/3}\left[\frac{3}{4}x^{4/3}\right] \quad (d)$$

$$(d) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_2 = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{9}{4}2^{1/3}x^{4/3} + c}}, c \text{ étant une constante.}$$

3 **Calculons l'intégrale indéfinie I_3 :**

Nous savons que :

$$I_3 = \int \left(\frac{1}{(x)^4} + 10\right)dx \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_3 = \int (x^{-4} + 10)dx \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_3 = \int x^{-4}dx + \int 10dx \quad (c)$$

$$(c) \Leftrightarrow I_3 = \left[-\frac{1}{3}x^{-3}\right] + [10x] \quad (d)$$

$$(d) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_3 = -\frac{1}{3}x^{-3} + 10x + c}}, c \text{ étant une constante.}$$

4 **Calculons l'intégrale indéfinie I_4 :**

Nous savons que :

$$I_4 = \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)dx \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_4 = \int \sqrt{x}dx + \int \frac{1}{x}dx \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_4 = \int x^{1/2}dx + \int \frac{1}{x}dx \quad (c)$$

$$(c) \Leftrightarrow I_4 = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right] + [\text{Log}|x|] \quad (d)$$

$$(d) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_4 = \frac{2}{3}x^{3/2} + \textbf{Log}|x| + c}}, \; c \text{ étant une constante.}$$

5 Calculons l'intégrale indéfinie I_5 :

Nous savons que :

$$I_5 = \int a^x dx, \; a \in R_+^* - \{1\} \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_5 = \int e^{\text{Log}a^x} dx \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_5 = \int e^{x\text{Log}a} dx \quad (c)$$

$$(c) \Leftrightarrow I_5 = \left[\frac{1}{\text{Log}a} e^{x\text{Log}a}\right] \quad (d)$$

$$(d) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_5 = \frac{1}{\textbf{Log}a} a^x + c}}, \; c \text{ étant une constante.}$$

6 Calculons l'intégrale indéfinie I_6 :

Nous savons que :

$$I_6 = \int (e^{x/a} + e^{-x/a}) dx, \; a \in R^* \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_6 = \int (e^{2x/a} + e^{-2x/a} + 2) dx \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_6 = \int e^{2x/a} dx + \int e^{-2x/a} dx + \int 2dx \quad (c)$$

$$(c) \Leftrightarrow I_6 = \left[\frac{a}{2} e^{2x/a}\right] + \left[-\frac{a}{2} e^{-2x/a}\right] + [2x] \quad (d)$$

$$(d) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_6 = \frac{a}{2} e^{2x/a} - \frac{a}{2} e^{-2x/a} + 2x + c}}, \; c \text{ étant une constante.}$$

TRAINING 4

Calculer les intégrales définies suivantes :

1 $I_1 = \int_2^3 \frac{x + 1/2}{x^2 + x - 3} dx$.

2 $I_2 = \int_0^3 \frac{2x + 1}{\sqrt{2x + 1}} dx$.

3 $I_3 = \int_0^1 (1 + x^2) x dx$.

4 $I_4 = \int_0^{e^2} 3(1 + x^3) x^2 dx$.

5 $I_5 = \int_1^5 \sqrt{2x - 1} dx$.

6 $I_6 = \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{25 - 3x}}$.

7 $I_7 = \int_0^1 \frac{x^2}{2 + x^3} dx$.

8 $I_8 = \int_1^2 \frac{dx}{x(1 + \mathrm{Log} x)}$.

9 $I_9 = \int_0^1 \frac{e^x}{(10 - 3e^x)^2} dx$.

10 $I_{10} = \int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$.

11 $I_{11} = \int_0^1 x^2 \sqrt{1 + x^3} dx$.

12 $I_{12} = \int_0^1 e^{-x}(1 + e^x) dx$.

13 $I_{13} = \int_e^{e^2} \frac{1 + \mathrm{Log} x}{x \mathrm{Log} x} dx$.

CORRECTION

1 Calculons I_1 :

$I_1 = \int_2^3 \frac{x+1/2}{x^2+x-3}dx$.

Ici : $f(x) = \frac{x+1/2}{x^2+x-3} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{U'(x)}{U(x)}\right)$,

avec : $U(x) = x^2+x-3$ et $U'(x) = 2x+1$.

D'où : $I_1 = \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{U'(x)}{U(x)}dx$

$\Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{2}[\ln(U(x))]_2^3$

$\Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{2}[\ln(x^2+x-3)]_2^3$

$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_1 = \frac{\ln(3)}{2}}}$.

2 Calculons I_2 :

$I_2 = \int_0^3 \frac{2x+1}{\sqrt{2x+1}}dx$.

Ici : $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{2x+1}} \Leftrightarrow f(x) = [U(x)]^{1/2}$,

avec : $U(x) = 2x+1$.

Nous pouvons aussi écrire :

$f(x) = \frac{1}{2}U'(x) \times (U(x))^{1/2}$, avec : $U'(x) = 2$.

D'où : $I_2 = \frac{1}{2}\int_0^3 U'(x) \times (U(x))^{1/2}dx$

$\Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{U^{3/2}}{3/2}\right]_0^3$

$\Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{3}[U^{3/2}]_0^3$

$$\Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{3}[(2x+1)^{3/2}]_0^3$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_2 = \frac{7\sqrt{7}-1}{3}}}.$$

3 Calculons I_3 :

$$I_3 = \int_0^1 x(1+x^2)dx.$$

Ici : $f(x) = x(1+x^2) \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}U'(x) \times (U(x))^1$,

avec : $U(x) = 1+x^2$ et $U'(x) = 2x$.

D'où : $I_3 = \frac{1}{2}\int_0^1 U'(x) \times (U(x))^1 dx$

$$\Leftrightarrow I_3 = \frac{1}{2}\left[\frac{(U(x))^2}{2}\right]_0^1$$

$$\Leftrightarrow I_3 = \frac{1}{4}[(U(x))^2]_0^1$$

$$\Leftrightarrow I_3 = \frac{1}{4}[(1+x^2)^2]_0^1$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_3 = \frac{3}{4}}}.$$

4 Calculons I_4 :

$$I_4 = \int_1^{e^2} 3(1+x^3)x^2 dx.$$

Ici : $f(x) = 3x^2(1+x^3) \Leftrightarrow f(x) = U'(x) \cdot (U(x))^1$,

avec : $U(x) = 1+x^3$ et $U'(x) = 3x^2$.

D'où : $I_4 = \int_1^{e^2} U'(x) \times (U(x))^1 dx$

$$\Leftrightarrow I_4 = \left[\frac{(U(x))^2}{2}\right]_1^{e^2}$$

$$\Leftrightarrow I_4 = \frac{1}{2}[(1+x^3)^2]_1^{e^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_4 = \frac{e^{12}+2e^6-3}{2}}}.$$

5 Calculons I_5 :

$$I_5 = \int_1^5 \sqrt{2x-1}\,dx.$$

Ici : $f(x) = \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}U'(x) \times (U(x))^{1/2}$,

avec : $U(x) = 2x-1$ et $U'(x) = 2$.

D'où : $I_5 = \int_1^5 \frac{1}{2}U'(x) \times (U(x))^{1/2}dx$

$$\Leftrightarrow I_5 = \frac{1}{2}\left[\frac{((U(x))^2)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_1^5$$

$$\Leftrightarrow I_5 = \frac{1}{3}[(2x-1)^{3/2}]_1^5$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_5 = \frac{26}{3}}}.$$

6 Calculons I_6 :

$$I_6 = \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{25-3x}}.$$

Ici : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{25-3x}} \Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{3}\frac{U'(x)}{\sqrt{U(x)}}$,

avec : $U(x) = 25-3x$ et $U'(x) = -3$.

D'où : $I_6 = \int_0^3 -\frac{1}{3}\frac{U'(x)}{\sqrt{U(x)}}dx$

$$\Leftrightarrow I_6 = -\frac{1}{3}[2\sqrt{U(x)}]_0^3$$

$$\Leftrightarrow I_6 = -\frac{2}{3}[\sqrt{25-3x}]_0^3$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_6 = \frac{2}{3}}}.$$

7 Calculons I_7 :

$$I_7 = \int_0^1 \frac{x^2}{2+x^3}dx.$$

Ici : $f(x) = \dfrac{x^2}{2+x^3} \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{1}{3}\dfrac{U'(x)}{U(x)}$,

avec : $U(x) = 2+x^3$ et $U'(x) = 3x^2$.

D'où : $I_7 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{3}\frac{U'(x)}{U(x)}dx$

$$\Leftrightarrow I_7 = \frac{1}{3}[\ln(U(x))]_0^1$$

$$\Leftrightarrow I_7 = \frac{1}{3}[\ln[2+x^3]]_0^1$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_7 = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{3}{2}\right)}}.$$

8 Calculons I_8 :

$$I_8 = \int_1^2 \frac{dx}{x(1+\ln x)}.$$

Ici : $f(x) = \dfrac{1}{x(1+\ln x)} \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{U'(x)}{U(x)}$,

avec : $U(x) = 1+\ln x$ et $U'(x) = \dfrac{1}{x}$.

D'où : $I_8 = \displaystyle\int_1^2 \frac{U'(x)}{U(x)}dx$

$$\Leftrightarrow I_8 = [\ln(U(x))]_1^2$$

$$\Leftrightarrow I_8 = [\ln[1+\ln x]]_1^2$$

$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_8 = \ln(1 + \ln 2)}}$.

9 Calculons I_9 :

$$I_9 = \int_0^1 \frac{e^x}{(10 - 3e^x)^2} dx .$$

Ici : $f(x) = \dfrac{e^x}{(10 - 3e^x)^2} \Leftrightarrow f(x) = -\dfrac{1}{3}\dfrac{U'(x)}{[U(x)]^2}$,

avec : $U(x) = 10 - 3e^x$ et $U'(x) = -3e^x$.

D'où : $I_9 = \displaystyle\int_0^1 -\frac{1}{3}\frac{U'(x)}{[U(x)]^2} dx$

$\Leftrightarrow I_9 = -\dfrac{1}{3} \displaystyle\int_0^1 \frac{U'(x)}{[U(x)]^2} dx$

$\Leftrightarrow I_9 = -\dfrac{1}{3} \left[\dfrac{-1}{U(x)}\right]_0^1$

$\Leftrightarrow I_9 = \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{10 - 3e^x}\right]_0^1$

$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_9 = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{10 - 3e}\right) - \dfrac{1}{21}}}$.

10 Calculons I_{10}:

$$I_{10} = \int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx .$$

Ici : $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{U'(x)}{U(x)}$,

avec : $U(x) = e^x + e^{-x}$ et $U'(x) = e^x - e^{-x}$.

D'où : $I_{10} = \displaystyle\int_0^1 \frac{U'(x)}{U(x)} dx$

$\Leftrightarrow I_{10} = [\ln(U(x))]_0^1$

$$\Leftrightarrow I_{10} = [\ln[e^x + e^{-x}]]_0^1$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_{10} = \ln\left[\frac{e + e^{-1}}{2}\right]}}.$$

11 Calculons I_{11}:

$$I_{11} = \int_0^1 x^2 \times \sqrt{1 + x^3}\,dx.$$

Ici : $f(x) = x^2 \times \sqrt{1 + x^3} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{3}U'(x) \times (U(x))^{1/2}$,

avec : $U(x) = 1 + x^3$ et $U'(x) = 3x^2$.

D'où : $I_{11} = \int_0^1 \frac{1}{3}U'(x)(U(x))^{1/2}dx$

$$\Leftrightarrow I_{11} = \frac{1}{3}\left[\frac{(U(x))^{3/2}}{3/2}\right]_0^1$$

$$\Leftrightarrow I_{11} = \frac{2}{9}[(1 + x^3)^{3/2}]_0^1$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_{11} = \frac{4\sqrt{2}}{9} - \frac{2}{9}}}.$$

12 Calculons I_{12}:

$$I_{12} = \int_0^1 e^{-x}(1 + e^x)dx.$$

Ici : $f(x) = e^{-x}(1 + e^x) \Leftrightarrow f(x) = U(x)\left(1 + \frac{1}{U(x)}\right)$,

avec : $U(x) = e^{-x}$ et $\frac{1}{U(x)} = e^x$.

D'où : $I_{12} = \int_0^1 U(x)\left(1 + \frac{1}{U(x)}\right)dx$

$$\Leftrightarrow I_{12} = \int_0^1 (U(x) + 1)dx$$

$$\Leftrightarrow I_{12} = \int_0^1 (e^{-x} + 1)dx$$

$\Leftrightarrow I_{12} = [-e^{-x} + x]_0^1$

$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_{12} = 2 - e^{-1}}}$.

13 Calculons I_{13}:

$I_{13} = \int_e^{e^2} \frac{1 + \ln x}{x \ln x} dx$.

Ici : $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x \ln x} \Leftrightarrow f(x) = \frac{U'(x)}{U(x)}$,

avec : $U(x) = x \ln x$ et $U'(x) = 1 + \ln x$.

D'où : $I_{13} = \int_e^{e^2} \frac{U'(x)}{U(x)} dx$

$\Leftrightarrow I_{13} = [\ln(U(x))]_e^{e^2}$

$\Leftrightarrow I_{13} = [\ln[x \ln x]]_e^{e^2}$

$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_{13} = 1 + \ln 2}}$.

INTÉRROS

LYCÉES

INTERRO. 1

1 Calculez les intégrales suivantes :

$$I = \int_1^2 \left(\frac{6x^2 + 4x}{x^3 + x^2 - 1} - (\ln(11)) \right) dx$$

$$J = \int_1^7 \left(\frac{x - 3}{x^2 + 1} \right) dx$$

$$K = \int_e^{e^2} \left(\frac{1 + \ln x}{x \ln x} \right) dx \text{, en posant : } U(x) = x \ln x \text{.}$$

2 Soit $\boxed{I = \int_3^4 \frac{7dx}{\sqrt{x^2 + 2}}}$.

ⓐ. Calculer la dérivée de $g(x) = \sqrt{x^2 + 2}$ **.**

ⓑ. En déduire sur $[3,4]$ f' **, avec** $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 2})$ **.**

ⓒ. Que vaut alors I **?**

CORRECTION

1 ▪ Calculons I :

$$I = \int_1^2 \left(\frac{6x^2 + 4x}{x^3 + x^2 - 1} \right) - \ln(11) dx \text{.}$$

Soit $f(x) = \frac{6x^2 + 4x}{x^3 + x^2 - 1} - \ln(11)$. f est continue sur $[1, 2]$, elle admet donc des primitives sur $[1, 2]$ et par conséquent I existe.

$$I = \int_1^2 \left(\frac{6x^2 + 4x}{x^3 + x^2 - 1} \right) dx - \int_1^2 \ln(11) dx$$

$$\Leftrightarrow I = 2\int_1^2 \frac{U'(x)}{U(x)} dx - \ln(11)[x]_1^2 \text{,}$$

avec : $U(x) = x^3 + x^2 - 1$ et $U'(x) = 3x^2 + 2x$.

D'où : $I = 2[\ln(x^3 + x^2 - 1)]_1^2 - \ln(11)$

$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I = \ln(11)}}$.

- **Calculons J :**

$J = \int_1^7 \left(\frac{x-3}{x^2+1}\right) dx$.

Soit $f(x) = \frac{x-3}{x^2+1}$. f est continue sur $[1, 7]$, elle admet donc des primitives sur $[1, 7]$ et par conséquent J existe.

$J = \int_1^7 \left(\frac{x}{x^2+1}\right) dx - 3\int_1^7 \left(\frac{1}{x^2+1}\right) dx$

$\Leftrightarrow J = \frac{1}{2}\int_1^7 \frac{U'(x)}{U(x)} dx - 3[arc\tan(x)]_1^7$,

avec : $U(x) = x^2 + 1$ et $U'(x) = 2x$.

D'où : $J = \frac{1}{2}[\ln(x^2+1)]_1^7 - 3(arc\tan(7) - arc\tan(1))$

$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{J = \ln 5 - 3(arc\tan(7) - arc\tan(1))}}$.

- **Calculons K :**

$K = \int_e^{e^2} \left(\frac{1+\ln x}{x\ln x}\right) dx$ et $U(x) = x\ln x$.

Soit $f(x) = \left(\frac{1+\ln x}{x\ln x}\right)$. f est continue sur $[e, e^2]$, elle admet donc des primitives sur $[e, e^2]$ et par conséquent K existe.

$K = \int_e^{e^2} \frac{U'(x)}{U(x)} dx$, avec : $U'(x) = 1 + \ln x$.

D'où : $K = [\ln(x\ln x)]_e^{e^2}$

$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{K = 1 + \ln 2}}$.

2 ⓐ. **Calculons g' :**

$g(x) = \sqrt{x^2 + 2}$.

Posons : $g = \sqrt{g_1}$ avec : $g_1(x) = x^2 + 2$.

g_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme et $g_1(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

De plus, la fonction racine est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme composée, et nous pouvons calculer g'.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \; g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}}.$$

ⓑ. **Sur $[3,4]$, déduisons en f' :**

$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 2})$.

Posons : $f = \ln(g_2 + g)$ avec : $g_2(x) = x$.

g_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme et g est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après a), par conséquent $(g_2 + g)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de 2 fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$(g_2 + g)$ est donc dérivable sur $[3,4]$.

De plus : $\forall x \in [3,4]$, $(g_2 + g)(x) > 0$ et la fonction ln est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Donc f est dérivable sur $[3,4]$, comme composée, et nous pouvons calculer f'.

$$\boxed{\forall x \in [3,4], \; f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}}}.$$

ⓒ. **Déterminons la valeur de I :**

$$I = 7\int_3^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}}\right) dx.$$

Par conséquent : $I = 7[\ln(x + \sqrt{x^2 + 2})]_3^4$

$$\Rightarrow \boxed{I = 7\ln\left(\frac{4 + \sqrt{18}}{3 + \sqrt{11}}\right)}.$$

INTERRO. 2

1 **Calculez l'intégrale I :**

$$I = \int_2^4 \frac{6x-3}{x-1}dx \text{ , en mettant } I \text{ sous la forme : } 3\int_2^4 \left(a + \frac{b}{x-1}\right)dx .$$

2 **En déduire la valeur moyenne de f sur $[2,4]$, avec : $f(x) = \dfrac{6x-3}{x-1}$.**

3 **Calculer $J = \displaystyle\int_1^3 \left(\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right)dx$, en posant : $U(x) = 1 + \sqrt{x}$.**

CORRECTION

1 ⓐ. **Déterminons *a* et *b* :**

$$\frac{6x-3}{x-1} = 3\left(a + \frac{b}{x-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow 6x - 3 = 3(a(x-1) + b)$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = ax + (b - a).$$

Par identification, nous avons : $\begin{cases} a = 2 \\ b - a = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \mathbf{a = 2} \\ \mathbf{b = 1} \end{cases}}$.

ⓑ. **Calculons alors I :**

$$I = \int_2^4 3\left(2 + \frac{1}{x-1}\right)dx .$$

$f(x) = \dfrac{6x-3}{x-1}$ est continue sur $[2,4]$, elle admet donc des primitives sur $[2,4]$ et par conséquent I existe.

$$I = 3\int_2^4 \left(2 + \frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$\Leftrightarrow I = 3[2x + \ln(x-1)]_2^4$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{I = 12 + 3\ln 3}}.$$

2 **Déduisons-en la valeur moyenne de f sur $[2,4]$:**

D'après le cours, elle correspond au nombre μ tel que : $\mu = \frac{1}{4-2}\int_2^4 f(x)dx$.

Ici, nous avons donc : $\mu = \frac{1}{2}I \Rightarrow \boxed{\mu = 6 + 1{,}5\ln 3}$.

3 **Calculons J :**

Soit $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$. f est continue sur $[1,3]$, elle admet donc des primitives sur $[1,3]$ et par conséquent J existe.

Notons que : $J = \int_1^3 2 \cdot \frac{U'(x)[U(x)-1]}{U(x)}dx$, avec : $U(x) = 1+\sqrt{x}$.

Pourquoi ? Car : $U'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow U'(x) = \frac{1}{2(U(x)-1)}$ (a)

(a) $\Rightarrow U'(x)[2(U(x)-1)] = 1$.

Et donc : $\frac{1}{U(x)} = 2 \cdot \frac{U'(x)[U(x)-1]}{U(x)}$.

D'où :

$$J = 2 \cdot \left(\int_1^3 U'(x)dx - \int_1^3 \frac{U'(x)}{U(x)}dx\right)$$

$$\Leftrightarrow J = 2 \cdot [U(x)]_1^3 - 2 \cdot [\ln(U(x))]_1^3$$

$$\Leftrightarrow J = 2 \cdot [1+\sqrt{x}]_1^3 - 2 \cdot [\ln[1+\sqrt{x}]]_1^3$$

$$\Rightarrow \boxed{J = 2 \cdot \left[(\sqrt{3}-1) + \ln\left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right)\right]}.$$

INTERRO. 3

1 ⓐ. **Calculez** $J = \int_0^{\pi/2}\left(\dfrac{\cos x}{1+2\sin x}\right)dx$.

ⓑ. **Soit** $I = \int_0^{\pi/2}\left(\dfrac{\sin(2x)}{1+2\sin x}\right)dx$.

Trouver la valeur de I **après avoir montré que** $I + J = 1$.

2 **Soit** $f(x) = \dfrac{2x^2}{3(x-1)^2}$, **avec :** $\mathscr{D}f = \mathbb{R} - \{1\}$.

ⓐ. **Déterminer** $a, b, c \in \mathbb{R}$ **tels que :** $\forall x \in]1, +\infty[$, $f(x) = a + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{(x-1)^2}$.

ⓑ. **Calculer alors :** $I = \int_3^7 f(x)dx$.

ⓒ. **En déduire la valeur moyenne de** f **sur** $[3,7]$.

3 $\forall n \in \mathbb{N}$, $K_n = \int_0^1 \dfrac{e^{nx}}{e^x + 1}dx$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

ⓐ. **Calculer** K_1 **et** $K_0 + K_1$ **et en déduire** K_0.

ⓑ. **Déterminer** $K_{n+1} + K_n$.

ⓒ. **En déduire** K_2 **et** K_3.

CORRECTION

1 ⓐ. **Calculons** J :

Nous remarquons que : $J = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \cdot \frac{U'(x)}{U(x)}dx$,

avec : $U(x) = 1 + 2\sin x$ et $U'(x) = 2\cos x$.

Soit $f(x) = \dfrac{\cos x}{1+2\sin x}$. f est continue sur $[0, \pi/2]$, elle admet donc des primitives sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et par conséquent J existe.

Dans ces conditions :

$$J = \frac{1}{2} \cdot [\ln(U(x))]_0^{\pi/2}$$

$$\Leftrightarrow J = \frac{1}{2} \cdot [\ln(1 + 2\sin x)]_0^{\pi/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{J = \frac{1}{2}\ln 3}}.$$

ⓑ. **Montrons que $I + J = 1$** :

Soit $g(x) = \dfrac{\sin(2x)}{1 + 2\sin x}$. g est continue sur $[0, \pi/2]$, elle admet donc des primitives sur $[0, \pi/2]$ et par conséquent I existe.

$$I + J = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\cos x + \sin(2x)}{1 + 2\sin x}\right) dx.$$

Or :

Par conséquent, nous avons bien $\boxed{\boldsymbol{I + J = 1}}$.

Dans ces conditions : $I = 1 - J \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I = 1 - \frac{1}{2}\ln 3}}$.

2 ⓐ. **Déterminons a, b, c** :

$\forall x \in]1, +\infty[$, nous avons alors :

$$\frac{2x^2}{3(x-1)^2} = a + \frac{b}{(x-1)} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2}{3(x-1)^2} = \frac{a(x-1)^2 + b(x-1) + c}{(x-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x^2 = a(x^2 + 1 - 2x) + b(x-1) + c.$$

Par identification, nous avons :

$$\begin{cases} a = 2/3 \\ -2a+b = 0 \\ a-b+c = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \boldsymbol{a = 2/3} \\ \boldsymbol{b = 4/3} \\ \boldsymbol{c = 2/3} \end{cases}}.$$

ⓑ. **Calculons I :**

Soit $f(x) = \dfrac{2x^2}{3(x-1)^2}$. f est continue sur $[3,7]$, elle admet donc des primitives sur $[3,7]$ et par conséquent I existe.

$$I = \frac{2}{3}\int_3^7 \frac{x^2}{(x-1)^2}dx \Leftrightarrow I = \frac{1}{3}\cdot\int_3^7\left(2+\frac{4}{(x-1)}+\frac{2}{(x-1)^2}\right)dx$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{1}{3}\cdot\left[2x+4\ln(x-1)-\frac{2}{(x-1)}\right]_3^7$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{26}{3}+4\ln 3\right)}}.$$

ⓒ. **Déduisons-en la valeur moyenne de f sur $[3,7]$:**

D'après le cours, elle correspond au nombre μ tel que : $\mu = \dfrac{1}{7-3}\displaystyle\int_3^7 f(x)dx$.

Ici, nous avons donc : $\mu = \dfrac{1}{4}I \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\mu = \frac{1}{12}\cdot\left(\frac{26}{3}+4\ln 3\right)}}$.

3 ⓐ. **Calculons K_1 et K_0+K_1 et déduison-en K_0 :**

Soit $f(x) = \dfrac{e^{nx}}{e^x+1}$, $\forall x \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$. D'une manière générale, f est continue sur $[0,1]$, elle admet donc des primitives sur $[0,1]$ et par conséquent K_n existe.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer K_1 et K_0.

- $K_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx \Leftrightarrow K_1 = \int_0^1 \frac{U'(x)}{U(x)}dx$, avec : $U(x) = e^x+1$ et $U'(x) = e^x$.

D'où : $K_1 = [\ln(U(x))]_0^1 \Leftrightarrow K_1 = [\ln(e^x+1)]_0^1$

$\Rightarrow K_1 = \ln(e+1) - \ln 2 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{K_1 = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)}}$.

- $K_0 + K_1 = \int_0^1 \left(\frac{1}{e^x+1} + \frac{e^x}{e^x+1}\right)dx$

$\Leftrightarrow K_0 + K_1 = \int_0^1 dx$

$\Leftrightarrow K_0 + K_1 = [x]_0^1$

$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{K_0 + K_1 = 1}}$.

- Par conséquent : $K_0 = 1 - K_1 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{K_0 = 1 - \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)}}$.

ⓑ. **Déterminons $\boldsymbol{K_{n+1} + K_n}$:**

$$K_{n+1} + K_n = \int_0^1 \frac{e^{(n+1)x} + e^{nx}}{e^x+1}dx$$

$$\Leftrightarrow K_{n+1} + K_n = \int_0^1 e^{nx}\left(\frac{e^x+1}{e^x+1}\right)dx$$

$$\Leftrightarrow K_{n+1} + K_n = \int_0^1 e^{nx}dx \Leftrightarrow K_{n+1} + K_n = \frac{1}{n}[e^{nx}]_0^1$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{K_{n+1} + K_n = \frac{e^n - 1}{n}}}.$$

ⓒ. **Déduisons-en $\boldsymbol{K_2}$ et $\boldsymbol{K_3}$:**

D'une manière générale nous avons donc :

$$\boxed{\boldsymbol{K_{n+1} = \left(\frac{e^n-1}{n}\right) - K_n}}.$$

D'où : ▪ $K_2 = (e-1) - K_1 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{K_2 = (e-1) - \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)}}$;
$(\boldsymbol{n = 1})$

▪ $K_3 = \left(\frac{e^2-1}{2}\right) - K_2 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{K_3 = \left(\frac{e^2-1}{2}\right) - (e-1) + \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)}}$.
$(\boldsymbol{n = 2})$

INTERRO. 4

1 **Soit** $I_n = \int_0^1 \frac{4x^n}{e^x + x + 1}dx$ **avec** $n \in \mathbb{N}^*$.

Sachant que l'on a : $1 \leq e^x + x \leq e + 1$**, déterminer un encadrement de** I_n.

2 **Montrer que :**

- $\frac{1}{5} \leq \int_1^3 \frac{1}{1 + x^2}dx \leq 1 \quad (1)$
- $\frac{1}{\sqrt{5}} \leq \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}dx \leq \frac{1}{2} \quad (2)$.

3 **Soit** $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1 + 2x + 4x^2}dx$, $n \in \mathbb{N}$.

ⓐ. **Déterminer les constantes** $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ **telles que :**

$\forall x \in [0, 1]$, $C_1 \leq \frac{1}{1 + 2x + 4x^2} \leq C_2$.

ⓑ. **En déduire un encadrement de** I_n **sur** $[0,1]$ **et la limite de** I_n **quand** n **tend vers** $+\infty$.

CORRECTION

1 **Déterminons un encadrement de** I_n :

D'après l'énoncé : $1 \leq e^x + x \leq e + 1 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow 1 + 1 \leq e^x + x + 1 \leq e + 1 + 1$

$\Leftrightarrow 2 \leq e^x + x + 1 \leq e + 2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{e + 2} \leq \frac{1}{e^x + x + 1} \leq \frac{1}{2} \quad (2)$, car sur $[0,1]$, tous ces termes sont strictement positifs.

(2) $\Leftrightarrow \dfrac{4x^n}{e+2} \leq \dfrac{4x^n}{e^x+x+1} \leq \dfrac{4x^n}{2}$ (3), car $x^n > 0$ sur $[0,1]$.

- Soient les fonctions : $g(x) = \dfrac{4x^n}{e+2}$, $f(x) = \dfrac{4x^n}{e^x+x+1}$ et $h(x) = \dfrac{4x^n}{2}$.

g, f et h sont continues sur $[0,1]$, elles admettent donc des primitives sur $[0,1]$ et par conséquent : $\int_0^1 g(x)dx$, $\int_0^1 f(x)dx$ et $\int_0^1 h(x)dx$ existent.

- De plus, les fonctions g, f et h sont positives sur $[0,1]$.
- Enfin, les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant.

Les conditions étant réunies,

$$(3) \Leftrightarrow \int_0^1 \left(\frac{4x^n}{e+2}\right)dx \leq \int_0^1 \left(\frac{4x^n}{e^x+x+1}\right)dx \leq \int_0^1 \left(\frac{4x^n}{2}\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{e+2}\right) \cdot \left[\frac{x^{(n+1)}}{(n+1)}\right]_0^1 \leq I_n \leq 2 \cdot \left[\frac{x^{(n+1)}}{(n+1)}\right]_0^1$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\mathbf{4}}{(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})(\boldsymbol{e}+\mathbf{2})} \leq \boldsymbol{I_n} \leq \frac{\mathbf{2}}{(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})}}.$$

2 ⓐ. **Montrons (1)** :

$\forall x \in [1,3]$, $1 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq x^2 \leq 9$

$\Leftrightarrow 2 \leq 1 + x^2 \leq 10$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{10} \leq \dfrac{1}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{2}$ $\quad (1')$,

car sur $[1,3]$, tous ces termes sont strictement positifs.

- Soient les fonctions : $g(x) = \dfrac{1}{10}$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et $h(x) = \dfrac{1}{2}$.

g, f et h sont continues sur $[1,3]$, elles admettent donc des primitives sur $[1,3]$ et par conséquent : $\int_1^3 g(x)dx$, $\int_1^3 f(x)dx$ et $\int_1^3 \frac{1}{2}dx$ existent.

- De plus, les fonctions g, f et h sont positives sur $[1,3]$.
- Enfin, les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant.

Les conditions étant réunies,

$$(1') \Leftrightarrow \int_1^3 \left(\frac{1}{10}\right) dx \leq \int_1^3 \left(\frac{1}{1+x^2}\right) dx \leq \int_1^3 \left(\frac{1}{2}\right) dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{10}[x]_1^3 \leq \int_1^3 \left(\frac{1}{1+x^2}\right) dx \leq \frac{1}{2} \cdot [x]_1^3$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{\frac{1}{5} \leq \int_1^3 \left(\frac{1}{1+x^2}\right) dx \leq 1}}.$$

ⓑ. **Montrons (2)** :

$\forall x \in [0,1/2]$, $0 \leq x \leq 1/2 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 1/4$

$$\Leftrightarrow 1 \leq 1 + x^2 \leq 5/4$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \frac{\sqrt{5}}{2}, \text{ avec } 1 + x^2 > 0,\ \forall x \in [0,1/2]$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1 \quad (2'),$$

car sur $[0,1/2]$, tous ces termes sont strictement positifs.

- Soient les fonctions : $g(x) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $h(x) = 1$.

g, f et h sont continues sur $[0,1/2]$, elles admettent donc des primitives sur $[0,1/2]$ et par conséquent : $\int_0^{1/2} g(x)dx$, $\int_0^{1/2} f(x)dx$ et $\int_0^{1/2} h(x)dx$ existent.

- De plus, les fonctions g, f et h sont positives sur $[0,1/2]$.
- Enfin, les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant.

Les conditions étant réunies,

$$(2') \Leftrightarrow \int_0^{1/2} \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) dx \leq \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) dx \leq \int_0^{1/2} dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot [x]_0^{1/2} \leq \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) dx \leq [x]_0^{1/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{\frac{1}{\sqrt{5}} \leq \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) dx \leq \frac{1}{2}}}.$$

3 ⓐ. **Déterminons les constantes C_1 et C_2 :**

$\forall x \in [0,1]$, $0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 4x^2 \leq 4$

$\Leftrightarrow 0 \leq 2x + 4x^2 \leq 6$

$\Leftrightarrow 1 \leq 1 + 2x + 4x^2 \leq 7$

$\Leftrightarrow \frac{1}{7} \leq \frac{1}{1+2x+4x^2} \leq 1 \quad (1)$,

car sur $[0,1]$, tous ces termes sont strictement positifs.

$(1) \Leftrightarrow C_1 \leq \frac{1}{1+2x+4x^2} \leq C_2 \quad (2)$.

Donc : $\boxed{\mathbf{C_1 = \frac{1}{7} \text{ et } C_2 = 1}}$.

ⓑ. **Encadrons alors I_n et déterminons limite I_n quand $n \to +\infty$:**

$(2) \Leftrightarrow \frac{x^n}{7} \leq \frac{x^n}{1+2x+4x^2} \leq x^n$ (3), car $x^n > 0$ sur $[0,1]$.

- Soient les fonctions : $g(x) = \frac{x^n}{7}$, $f(x) = \frac{x^n}{1+2x+4x^2}$ et $h(x) = x^n$.

g, f et h sont continues sur $[0,1]$, elles admettent donc des primitives sur $[0,1]$ et par conséquent : $\int_0^1 g(x)dx$, $\int_0^1 f(x)dx$ et $\int_0^1 h(x)dx$ existent.

- De plus, les fonctions g, f et h sont positives sur $[0,1]$.
- Enfin, les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant.

Les conditions étant réunies,

$$(3) \Leftrightarrow \frac{1}{7}\left[\frac{x^{(n+1)}}{(n+1)}\right]_0^1 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+2x+4x^2}dx \leq \left[\frac{x^{(n+1)}}{(n+1)}\right]_0^1$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{7(n+1)} \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+2x+4x^2}dx \leq \frac{1}{(n+1)}}.$$

Ici : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{7(n+1)} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{(n+1)} = 0$,

d'où, d'après le théorème des gendarmes nous pouvons affirmer que : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0}$.

INTERRO. 5

1 **Calculez en fonction de x la dérivée des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :**

$$F_1(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{t},\ F_2(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2} \ln t dt \text{ et } F_3(x) = \int_x^{x^3} ((\ln t)+1)dt.$$

2 **Pour $a > 0$, on considère l'intégrale :**

$$J(a) = \int_{1/a}^{a} \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx = \int_{1/a}^{a}\left(\frac{\ln(x)}{1+\frac{1}{x^2}}\right)\frac{dx}{x^2}.$$

En utilisant la deuxième écriture de $J(a)$, effectuer le changement de variable $U = \dfrac{1}{x}$ et montrer que $I(a) = -I(a)$. En déduire la valeur de $J(a)$.

3 **Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{x^2 e^x}{1+x}\right)dx$ et $J = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{e^x}{1+x}\right)dx$, avec : $1{,}091 \leq J \leq 1{,}164$.**

ⓐ. Montrer que $\forall x \in [0,1]$: $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{1+x}$ (a).

ⓑ. **Justifier l'égalité :** $\boldsymbol{J = \int_0^1 (1-x)e^x dx + I}$ **(b).**

ⓒ. **Calculer** $\boldsymbol{\int_0^1 (1-x)e^x dx = k}$**, sachant qu'une primitive sur** $\mathbb{R}$ **de** $\boldsymbol{(1-x)e^x}$ **est de la forme :** $\boldsymbol{(ax+b)e^x}$**.**

ⓓ. **Encadrer alors** $\boldsymbol{I}$.

CORRECTION

1 Calculons F_1', F_2' et F_3' :

ⓐ. $F_1(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{t}$.

- Soit $f_1(t) = \frac{1}{t}$. f_1 est continue sur $]0, +\infty[$, elle admet donc des primitives sur $]0, +\infty[$ et par conséquent : $\int_x^{2x} \frac{dt}{t}$ existe.

$F_1(x) = [\ln(t)]_x^{2x} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{F_1(x) = \ln(2x) - \ln(x)}}$.

- F_1 est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme somme de 2 fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer F_1' :

$\forall x \in]0,+\infty[,\ F_1'(x) = \frac{2}{2x} - \frac{1}{x} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{F_1'(x) = 0}}$.

ⓑ. $F_2(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2} (\ln t) dt$.

- Soit $f_2(t) = \ln t$. f_2 est continue sur $]0, +\infty[$, elle admet donc des primitives sur $]0, +\infty[$ et par conséquent : $\int_{\sqrt{x}}^{x^2} (\ln t) dt$ existe.

$F_2(x) = [t\ln(t) - t]_{\sqrt{x}}^{x^2} \Leftrightarrow F_2(x) = x^2\ln(x^2) - x^2 - (\sqrt{x}\ln(\sqrt{x}) - \sqrt{x})$

$\Leftrightarrow F_2(x) = 2x^2\ln x - x^2 - \frac{1}{2}\sqrt{x}\ln x + \sqrt{x}$

$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{F_2(x) = \left(2x^2 - \frac{1}{2}\sqrt{x}\right)\ln(x) + (-x^2 + \sqrt{x})}}$.

- F_2 est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer $F_2{}'$:

$\forall x \in]0,+\infty[,\ F_2{}'(x) = \left(4x - \frac{1}{4\sqrt{x}}\right)\ln(x) + \left(2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + \left(-2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{F_2{}'(x) = \left(4x - \frac{1}{4\sqrt{x}}\right)\ln(x)}}$.

c. $F_3(x) = \int_x^{x^3} (1 + \ln(t))dt$.

- Soit $f_3(t) = 1 + \ln(t)$. f_3 est continue sur $]0, +\infty[$, elle admet donc des primitives sur $]0, +\infty[$ et par conséquent : $\int_x^{x^3} (1 + \ln(t))dt$ existe.

$F_3(x) = [t \cdot \ln t]_x^{x^3} \Leftrightarrow F_3(x) = x^3\ln(x^3) - x\ln x$

$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{F_3(x) = (3x^3 - x)\ln(x)}}$.

- F_3 est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme produit de 2 fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer $F_3{}'$:

$\forall x \in]0,+\infty[,\ \boxed{\boldsymbol{F_3{}'(x) = (9x^2 - 1) \cdot \ln(x) + (3x^2 - 1)}}$.

2 a. Montrons que $J(a) = -J(a)$:

Procédons à un changement de variable.

Posons : $U(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow dU(x) = U'(x) \cdot dx$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow dU(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot dx \Leftrightarrow dU(x) = -[U(x)]^2 \cdot dx.$$

D'où : $J(a) = \displaystyle\int_a^{1/a} \frac{\ln\left(\frac{1}{U(x)}\right)}{1+[U(x)]^2}(-dU(x))$,

avec : $\begin{cases} \text{borne inférieure} = a = U(1/a), \\ \text{borne supérieure} = 1/a = U(a). \end{cases}$

D'où : $J(a) = \displaystyle\int_a^{1/a} \frac{-\ln(U(x))}{1+(U(x))^2} \cdot (-dU(x))$

$$\Leftrightarrow J(a) = \int_a^{1/a} \frac{\ln(U(x))}{1+(U(x))^2} \cdot dU(x)$$

$$\Leftrightarrow J(a) = -\int_{1/a}^{a} \frac{\ln(U(x))}{1+(U(x))^2} \cdot dU(x)$$

$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{J(a) = -J(a)}}$.

ⓑ. Déduisons-en la valeur de $J(a)$:

$J(a) = -J(a)$, par conséquent : $J(a) + J(a) = 0$ (2)

(2) $\Leftrightarrow 2J(a) = 0 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{J(a) = 0}}$.

3 ⓐ. Montrons l'égalité (a) :

$$1 - x + \frac{x^2}{1+x} = \frac{(1-x)(1+x)+x^2}{1+x} = \frac{1-x^2+x^2}{1+x} = \frac{1}{1+x}.$$

Donc l'égalité (a) est bien vérifiée.

ⓑ. Justifions l'égalité (b) :

Soit $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$. f est continue sur $[0,1]$, elle admet donc des primitives sur $[0,1]$

et par conséquent : J existe.

$$J = \int_0^1 c^x \cdot \left(1 - x + \frac{x^2}{1+x}\right) dx = \int_0^1 e^x \cdot (1-x) dx + \int_0^1 e^x \cdot \left(\frac{x^2}{1+x}\right) dx$$

$$\Leftrightarrow J = \int_0^1 e^x dx - \int_0^1 x e^x dx + \int_0^1 \frac{x^2 e^x}{1+x} dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{J = \int_0^1 (1-x) \cdot e^x dx + I}}.$$

ⓒ. **Soit $K = J - I$, calculons K :**

$$K = \int_0^1 (1-x) \cdot e^x dx$$

$$\Leftrightarrow K = [(-x+2)e^x]_0^1 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{K = e - 2}}.$$

ⓓ. **Encadrons I :**

D'après l'énoncé, nous avons : $1{,}091 \leq J \leq 1{,}164$ (d).

Or $I = J - K \Rightarrow I = J - e + 2$.

D'où : (d) $\Leftrightarrow 1{,}091 - e + 2 \leq I \leq 1{,}164 - e + 2$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{0{,}37 \leq I \leq 0{,}45}}.$$

COACHING
ALAIN PILLER
DEPUIS 1991

MATHS
TERMINALES
S ~ ES

1

COURS
ÉCO-GESTION
L1~L2~L3

Déchire Tout !!!
ACHETER
LES LIVRES
D'ALAIN PILLER
+ CORRIGÉS

ANNALES BAC
CORRIGÉES

2

9 782915 857818
ISBN : 2915857818

Diffusion Belin

PRIX : 6 €

PREMIUM ÉDITEUR