Bac Mathématiques
Série ES - 2016

Intégrales

TOUS LES EXERCICES
POUR AVOIR 20/20
– C'EST CADEAU ! –

alainpiller.fr

6

ALAIN

PILLER

PRIMITIVES, INTÉGRALES

Rien de plus facile !

BAC MATHS

TERM.

ES,L

SAVOIR

TRAINING

INTÉRROS LYCÉES

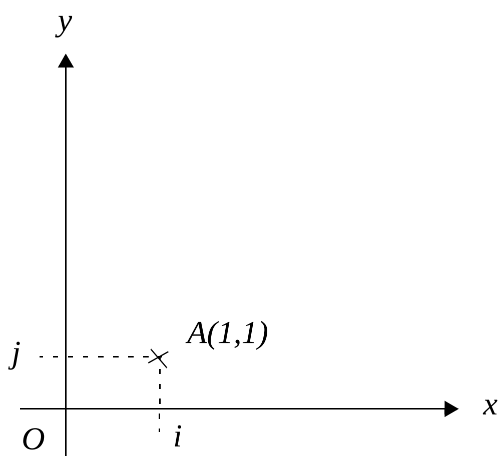
EXOS ANNALES BAC

PREMIUM ÉDITEUR

SAVOIR

A Unité d'aire

Dans un repère orthogonal $(O; \overrightarrow{Oi}, \overrightarrow{Oj})$, **l'unité d'aire (u.a.)**, est l'aire du rectangle $(OiAj)$ avec $A(1, 1)$.



B Primitive de *f*

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

On appelle **primitive de *f*** sur I toute fonction F dérivable sur I telle que : $\boldsymbol{F' = f}$.

- Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, qui admet une primitive G sur I. Alors, f admet une infinité de primitives sur I et toute primitive F de f sur I est : $\boldsymbol{F(x) = G(x) + c, c \in \mathbb{R}}$.
- Pour x_o et y_o fixés, il existe une unique primitive F de f avec : $F(x_o) = y_o$.
- Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives.

C Intégrale d'une fonction continue

• Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$ et ζ sa courbe représentative dans le repère orthogonal $(O; \overrightarrow{Oi}, \overrightarrow{Oj})$.

L'intégrale de "a" à "b" de f est l'aire $\mathcal{A}$ du domaine situé sous la courbe ζ :

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)dx.$$

• Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, soit F une primitive de f :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

D Valeur moyenne

Pour toute fonction f continue sur $I = [a, b]$, la valeur moyenne de f sur $[a, b]$ est le réel m tel que : $\boldsymbol{m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx}$.

E Propriétés de l'intégrale

①. Si f est intégrable sur $[-a, a]$ et si f est une fonction paire $(f(-x) = f(x))$ alors : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

②. Si f est intégrable sur $[-a, a]$ et si f est une fonction impaire $(f(-x) = -f(x))$ alors : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

③. Si f est intégrable sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, alors : $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

④. Nous avons : $\int_a^a f(x)dx = 0$

⑤. Si f est intégrable sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, alors :

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx, c \in [a, b].$$

C'est ce qu'on appelle la **relation de CHASLES**.

⑥. Si f et g sont intégrables sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, alors :

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

⑦. Si f est intégrable sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, alors :

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda\int_a^b f(x)dx, \forall\lambda \in \mathbb{R}.$$

⑧. Si f et g sont intégrables sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, alors :

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)dx = \lambda\int_a^b f(x)dx + \mu\int_a^b g(x)dx, \forall\lambda \text{ et } \mu \in \mathbb{R}.$$

⑨. Soient f et g intégrables sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$;

on suppose : $\forall x \in [a, b]$ si $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

⑩. Si f est intégrable sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, alors :

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

F Tableau des différentes primitives

Tableau 1 :

f	F	I
K	$K \cdot x$	$\mathbb{R}$
x^n $(n \neq 0$ et $n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	· $\mathbb{R}$ si $n > 0$ · $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ si $n < -1$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$
$\dfrac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$	$\dfrac{-1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(x)$	$]0, +\infty[$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$	$]0, +\infty[$

Tableau 2 :

f	F	*Conditions*
$K \cdot u'$	$K \cdot u$	-
$u' + v'$	$u + v$	-
$u' \cdot u^{n}$ $(n \neq 0 \text{ et } n \neq -1)$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	▪ Si $n < -1$ ▪ u ne s'annule pas sur I
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	u strictement positive sur I
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(u)$	u strictement positive sur I
$\dfrac{u'}{u^{2}}$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$	$\dfrac{-1}{u}$	$u \neq 0$ sur I
$u'e^{u}$	e^{u}	-
$\sin(ax+b)$	$\dfrac{-1}{a}\cos(ax+b)$	-
$\cos(ax+b)$	$\dfrac{1}{a}\sin(ax+b)$	-

Avec :

- u et v dérivables sur I
- $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$

TRAINING

TRAINING 1

A

Déterminer une primitive *F* sur *I* de la fonction *f* dans les cas suivants :

1 $f(x) = 3$ avec $I = \mathbb{R}$.

2 $f(x) = 7x$ avec $I = \mathbb{R}$.

3 $f(x) = 3x^2 + 7x + 3$ avec $I = \mathbb{R}$.

4 $f(x) = \frac{1}{x} + 10$ avec $I =]0, +\infty[$.

5 $f(x) = \frac{1}{x^2} + 7x + 10$ avec $I = \mathbb{R}^*$.

6 $f(x) = 3\sqrt{x} + 21x$ avec $[0, +\infty[$.

7 $f(x) = xe^{x^2}$ avec $I = \mathbb{R}$.

8 $f(x) = 6xe^{(x^2+1)}$ avec $I = \mathbb{R}$.

9 $f(x) = 2e^{(3x-2)}$;; avec $I = \mathbb{R}$.

10 $f(x) = \frac{4x}{2x^2 + 4}$ avec $I = \mathbb{R}$.

11 $f(x) = \frac{2x+1}{x^2 + x + 3}$ avec $I = \mathbb{R}$.

12 $f(x) = \frac{8x}{1 - x^2}$ avec $I =]-1, 1[$.

13 $f(x) = \frac{4}{(2x-1)^4}$ avec $I =]\frac{1}{2}, +\infty[$.

CORRECTION

1 Calculons une primitive de f sur $\mathbb{R}$:

$f(x) = 3$ et $I = \mathbb{R}$

D'où : f est continue sur $I = \mathbb{R}$, elle admet donc une primitive sur $\mathbb{R}$ cad une fonction F dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $F' = f$.

Ici : $\boxed{\boldsymbol{F(x) = 3x}}$ et nous avons bien $F'(x) = 3$.

2 Calculons une primitive de f sur $\mathbb{R}$:

$f(x) = 7x$ et $I = \mathbb{R}$.

D'où : f est continue sur $I = \mathbb{R}$, elle admet donc une primitive sur $\mathbb{R}$ cad une fonction F dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $F' = f$.

Ici : $\boxed{\boldsymbol{F(x) = \frac{7}{2}x^2}}$ et nous avons bien $F'(x) = 7x$.

3 Calculons une primitive de f sur $\mathbb{R}$:

$f(x) = 3x^2 + 7x + 3$ et $I = \mathbb{R}$.

D'où : f est continue sur $I = \mathbb{R}$, elle admet donc une primitive sur $\mathbb{R}$ cad une fonction F dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $F' = f$.

Ici : $\boxed{\boldsymbol{F(x) = x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 3x}}$ et nous avons bien $F'(x) = 3x^2 + 7x + 3$.

4 Calculons une primitive de f sur $]0, +\infty[$:

$f(x) = \frac{1}{x} + 10$ et $I =]0, +\infty[$.

D'où : f est continue sur $I =]0, +\infty[$, elle admet donc une primitive sur $]0, +\infty[$ cad une fonction F dérivable sur $]0, +\infty[$ avec $F' = f$.

Ici : $\boxed{\boldsymbol{F(x) = \ln(x) + 10x}}$ et nous avons bien $F'(x) = \frac{1}{x} + 10$.

5 Calculons une primitive de f sur $\mathbb{R}^*$:

$f(x) = \frac{1}{x^2} + 7x + 10$ et $I = \mathbb{R}^*$.

D'où : f est continue sur $I = \mathbb{R}^*$, elle admet donc une primitive sur $\mathbb{R}^*$ cad une fonction F dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec $F' = f$.

Ici : $\boxed{\boldsymbol{F(x) = \frac{-1}{x} + \frac{7}{2}x^2 + 10x}}$ et nous avons bien $F'(x) = \frac{1}{x^2} + 7x + 10$.

6 **Calculons une primitive de f sur $[0, +\infty[$:**

$f(x) = 3\sqrt{x} + 21x$ et $I = [0, +\infty[$.

D'où : f est continue sur $I = [0, +\infty[$, elle admet donc une primitive sur $]0, +\infty[$ cad une fonction F dérivable sur $[0, +\infty[$ avec $F' = f$.

Ici : $\boxed{\boldsymbol{F(x) = 2x^{3/2} + \frac{21}{2}x^2}}$ et nous avons bien $F'(x) = 3\sqrt{x} + 21x$.

7 **Calculons une primitive de f sur $\mathbb{R}$:**

$f(x) = xe^{x^2}$ et $I = \mathbb{R}$.

D'où : f est continue sur $I = \mathbb{R}$, elle admet donc une primitive sur $\mathbb{R}$ cad une fonction F dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $F' = f$.

Ici : $\boxed{\boldsymbol{F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}}}$ et nous avons bien $F'(x) = xe^{x^2}$. $(\boldsymbol{u'e^u})$

8 **Calculons une primitive de f sur $\mathbb{R}$:**

$f(x) = 6xe^{(x^2+1)}$ avec $I = \mathbb{R}$.

D'où : f est continue sur $I = \mathbb{R}$, elle admet donc une primitive sur $\mathbb{R}$ cad une fonction F dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $F' = f$.

Ici : $\boxed{\boldsymbol{F(x) = 3\ e^{(x^2+1)}}}$ et nous avons bien $F'(x) = 6xe^{(x^2+1)}$. $(\boldsymbol{u'e^u})$

9 **Calculons une primitive de f sur $\mathbb{R}$:**

$f(x) = 2e^{(3x-2)}$ avec $I = \mathbb{R}$.

D'où : f est continue sur $I = \mathbb{R}$, elle admet donc une primitive sur $\mathbb{R}$ cad une fonction F dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $F' = f$.

Ici : $\boxed{\boldsymbol{F(x) = \frac{2}{3}\ e^{(3x-2)}}}$ et nous avons bien $F'(x) = 2e^{(3x-2)}$. $(\boldsymbol{u'e^u})$

10 **Calculons une primitive de f sur $\mathbb{R}$:**

$f(x) = \dfrac{4x}{2x^2+4}$ avec $I = \mathbb{R}$.

D'où : f est continue sur $I = \mathbb{R}$, elle admet donc une primitive sur $\mathbb{R}$ cad une fonction F dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $F' = f$.

Ici : $\boxed{\boldsymbol{F(x) = \ln(2x^2+4)}}$ et nous avons bien $F'(x) = \dfrac{4x}{2x^2+4}$. $\left(\dfrac{\boldsymbol{u'}}{\boldsymbol{u}}\right)$

11 **Calculons une primitive de f sur $\mathbb{R}$:**

$f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+3}$ avec $I = \mathbb{R}$.

D'où : f est continue sur $I = \mathbb{R}$, elle admet donc une primitive sur $\mathbb{R}$ cad une fonction F dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $F' = f$.

Ici : $\boxed{\boldsymbol{F(x) = \ln(x^2+x+3)}}$ et nous avons bien $F'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+3}$. $\left(\dfrac{\boldsymbol{u'}}{\boldsymbol{u}}\right)$

12 **Calculons une primitive de f sur $]-1, 1[$:**

$f(x) = \dfrac{8x}{1-x^2}$ avec $I =]-1, 1[$.

D'où : f est continue sur $I =]-1, 1[$, elle admet donc une primitive sur $]-1, 1[$ cad une fonction F dérivable sur $]-1, 1[$ avec $F' = f$.

Ici : $\boxed{\boldsymbol{F(x) = -4\ln(1-x^2)}}$ et nous avons bien $F'(x) = \dfrac{8x}{1-x^2}$. $\left(\dfrac{\boldsymbol{u'}}{\boldsymbol{u}}\right)$

13 **Calculons une primitive de f sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$:**

$f(x) = \dfrac{4}{(2x-1)^4}$ et $I =]\frac{1}{2}, +\infty[$.

D'où : f est continue sur $I =]\frac{1}{2}, +\infty[$, elle admet donc une primitive sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$ cad une fonction F dérivable sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$ avec $F' = f$.

Ici : $\boxed{F(x) = \dfrac{-2}{3(2x-1)^3}}$ et nous avons bien $F'(x) = \dfrac{4}{(2x-1)^4}$. $(u'u^n$ **avec** $n = -3)$

B

Déterminer les primitives sur *I* des fonctions *f* suivantes :

1 $f_1(x) = \dfrac{1}{7x+3}$ sur $I = [3, 10]$.

2 $f_2(x) = 3(7x-1)^5$ sur $I = \mathbb{R}$.

3 $f_3(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}$ sur $I =]0, +\infty[$.

CORRECTION

1 Déterminons F_1 sur $[3, 10]$:

f_1 est continue sur $I = [3, 10]$, elle admet donc une primitive sur $[3, 10]$ cad une fonction F_1 dérivable sur $[3, 10]$ avec $F'_1 = f_1$.

Ici : $\boxed{F_1(x) = \dfrac{\ln(7x+3)}{7}}$. $\left(\dfrac{u'}{u}\right)$

Dans ces conditions toutes les primitives sur $[3, 10]$ de f_1 sont :

$$G_1(x) = F_1(x) + c \Rightarrow \boxed{G_1(x) = \frac{\ln(7x+3)}{7} + c, c \in \mathbb{R}}.$$

Par exemple nous avons :

$$G_1(x) = \frac{\ln(7x+3)}{7} + 4,$$

$$G_1(x) = \frac{\ln(7x+3)}{7} - 6,$$

$$G_1(x) = \frac{\ln(7x+3)}{7} + 69 \text{ etc...}$$

2 **Déterminons F_2 sur $\mathbb{R}$:**

f_2 est continue sur $I = \mathbb{R}$, elle admet donc une primitive sur $\mathbb{R}$ cad une fonction F_2 dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $F'_2 = f_2$.

Ici : $\boxed{F_2(x) = \frac{1}{14}(7x-1)^6}$.$(u'u^n)$

Dans ces conditions toutes les primitives sur $\mathbb{R}$ de f_2 sont :

$$G_2(x) = F_2(x) + c \Rightarrow \boxed{G_2(x) = \frac{(7x-1)^6}{14} + c, c \in \mathbb{R}}.$$

3 **Déterminons F_3 sur $]0, +\infty[$:**

f_3 est continue sur $I =]0, +\infty[$, elle admet donc une primitive sur $]0, +\infty[$ cad une fonction F_3 dérivable sur $]0, +\infty[$ avec $F'_3 = f_3$.

Ici : $\boxed{F_3(x) = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x^2}}$.

Dans ces conditions toutes les primitives sur $]0, +\infty[$ de f_3 sont :

$$G_3(x) = F_3(x) + c \Rightarrow \boxed{G_3(x) = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x^2} + c, c \in \mathbb{R}}.$$

C

Pour les fonctions suivantes, démontrer que F est une primitive sur un intervalle I (à préciser), et déterminer la primitive de f qui s'annule en $x = x_0$:

1 $f(x) = 3xe^x$, $F(x) = 3xe^x - 3e^x$, $x_0 = 1$.

2 $f(x) = e^x - \frac{1}{x}$, $F(x) = e^x - \ln(x)$, $x_0 = 3$.

3 $f(x) = \cos(3x+2)+4$, $F(x) = \frac{1}{3}\sin(3x+2)+4x$, $x_0 = \pi$.

CORRECTION

1 ⓐ. **Démontrons que F est une primitive de f sur I :**

$I = \mathbb{R}$.

Ici : f est continue sur $I = \mathbb{R}$. Elle admet donc une primitive F dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $F' = f$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = 3e^x + 3xe^x - 3e^x \Rightarrow F'(x) = 3xe^x$.

D'où on a bien : $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Par conséquent, F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

ⓑ. **Déterminons la primitive de f qui s'annule en $x = 1$:**

Il s'agit de déterminer $c \in \mathbb{R}$ telle que : $G(1) = 0 \Leftrightarrow F(1)+c = 0$.

$F(1)+c = 0 \Leftrightarrow (3e-3e)+c = 0 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{c = 0}}$.

Au total, la primitive de f qui s'annule en $x = 1$ est : $\boxed{\boldsymbol{F(x) = 3xe^x - 3e^x}}$.

2 ⓐ. **Démontrons que F est une primitive de f sur I :**

$I =]0, +\infty[$.

Ici : f est continue sur $I =]0, +\infty[$. Elle admet donc une primitive F dérivable sur $]0, +\infty[$ telle que : $F' = f$.

$\forall x \in]0, +\infty[$, $F'(x) = e^x - \frac{1}{x}$.

D'où on a bien : $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in]0, +\infty[$.

Par conséquent, F est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.

ⓑ. **Déterminons la primitive de f qui s'annule en $x = 3$:**

Il s'agit de déterminer $c \in \mathbb{R}$ telle que : $G(3) = 0 \Leftrightarrow F(3)+c = 0$.

$F(3)+c = 0 \Leftrightarrow (e^3 - \ln 3)+c = 0 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{c = \ln(3) - e^3}}$.

Au total, la primitive de f qui s'annule en $x = 3$ est :

$$\boxed{\boldsymbol{F(x) = e^{x} - \ln(x) + (\ln(3) - e^{3})}}.$$

3 ⓐ. **Démontrons que F est une primitive de f sur I :**

$I = \mathbb{R}$.

Ici : f est continue sur $I = \mathbb{R}$. Elle admet donc une primitive F dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $F' = f$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = \dfrac{1}{3} \times 3\cos(3x+2) + 4 \Leftrightarrow F'(x) = \cos(3x+2) + 4$.

D'où on a bien : $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Par conséquent, F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

ⓑ. **Déterminons la primitive de f qui s'annule en $x = \pi$:**

Il s'agit de déterminer $c \in \mathbb{R}$ telle que : $G(\pi) = 0 \Leftrightarrow F(\pi) + c = 0$.

$$F(\pi) + c = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\sin(3\pi+2)}{3} + 4\pi\right) + c = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{c = -\left[\frac{\sin(3\pi+2)}{3} + 4\pi\right]}}.$$

Au total, la primitive de f qui s'annule en $x = \pi$ est :

$$\boxed{\boldsymbol{F(x) = \frac{1}{3}\sin(3x+2) + 4x - \left[\frac{\sin(3\pi+2)}{3} + 4\pi\right]}}.$$

TRAINING 2

Calculer les intégrales suivantes :

1 $I_1 = \int_0^1 (x+3)dx$.

2 $I_2 = \int_3^6 (x^2+6)dx$.

3 $I_3 = \int_1^2 (x-3)(x-9)dx$.

4 $I_4 = \int_0^1 (3x^{1/2}-6x)dx$.

5 $I_5 = \int_0^3 (\sqrt{2x}+x^{1/3})dx$.

6 $I_6 = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^3}$.

7 $I_7 = \int_1^2 \frac{dx}{3x^2}$.

8 $I_8 = \int_1^2 \left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$.

9 $I_9 = \int_0^1 \frac{dx}{x+2}$.

10 $I_{10} = \int_3^6 e^x(e^x+3)dx$.

11 $I_{11} = \int_{-1}^3 x|x|dx$.

12 $I_{12} = \int_2^0 \sqrt{|1-x|}dx$.

13 $I_{13} = \int_{-1}^1 (x^2-\sqrt{|x|})\sqrt[3]{x^2}dx$.

14 $I_{14} = \int_{-2}^{2} (x^3 - \sqrt[3]{x})x^2 dx$.

15 $I_{15} = \int_{-1}^{1} e^{(-2x+1)} dx$.

CORRECTION

1 Calculons l'intégrale définie I_1 :

Nous savons que :

$$I_1 = \int_0^1 (x+3)dx \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_1 = \int_0^1 xdx + \int_0^1 3dx \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_1 = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + [3x]_0^1 \quad (c)$$

$$(c) \Rightarrow \boxed{\mathbf{I_1 = \frac{7}{2}}}.$$

2 Calculons l'intégrale définie I_2 :

Nous savons que :

$$I_2 = \int_3^6 (x^2+6)dx \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_2 = \int_3^6 x^2dx + \int_3^6 6dx \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_2 = \left[\frac{x^3}{3}\right]_3^6 + [6x]_3^6 \quad (c)$$

$$(c) \Rightarrow \boxed{\mathbf{I_2 = 81}}.$$

3 Calculons l'intégrale définie I_3 :

Nous savons que :

$$I_3 = \int_1^2 (x-3)(x-9)dx \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_3 = \int_1^2 (x^2 - 12x + 27)dx \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_3 = \int_1^2 x^2 dx + \int_1^2 (-12x)dx + \int_1^2 27dx \quad (c)$$

$$(c) \Leftrightarrow I_3 = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 + [-6x^2]_1^2 + [27x]_1^2 \quad (d)$$

$$(d) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_3 = \frac{34}{3}}}.$$

4 Calculons l'intégrale définie I_4 :

Nous savons que :

$$I_4 = \int_0^1 (3x^{1/2} - 6x)dx \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_4 = \int_0^1 3x^{1/2}dx + \int_0^1 (-6x)dx \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_4 = [2x^{3/2}]_0^1 + [-3x^2]_0^1 \quad (c)$$

$$(c) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_4 = -1}}.$$

5 Calculons l'intégrale définie I_5 :

Nous savons que :

$$I_5 = \int_0^3 (\sqrt{2x} + x^{1/3})dx \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_5 = \int_0^3 \sqrt{2x}dx + \int_0^3 x^{1/3}dx \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_5 = \int_0^3 (2x)^{1/2}dx + \int_0^3 x^{1/3}dx \quad (c)$$

$$(c) \Leftrightarrow I_5 = 2^{1/2}\int_0^3 x^{1/2}dx + \int_0^3 x^{1/3}dx \quad (d)$$

$$(d) \Leftrightarrow I_5 = 2^{1/2}\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^3 + \left[\frac{3}{4}x^{4/3}\right]_0^3 \quad (e)$$

$$(e) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_5 = 2\sqrt{6} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{81}}}.$$

6 Calculons l'intégrale définie I_6 :

Nous savons que :

$$I_6 = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^3} \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_6 = \int_{-1}^{0} x^{-3} dx \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_6 = \left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right]_{-1}^{0} \quad (c)$$

$$(c) \Rightarrow \boxed{\mathbf{I_6 = \frac{1}{2}}}.$$

7 Calculons l'intégrale définie I_7 :

Nous savons que :

$$I_7 = \int_{1}^{2} \frac{dx}{3x^2} \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_7 = \int_{1}^{2} \frac{x^{-2}}{3} dx \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_7 = \left[-\frac{x^{-1}}{3}\right]_{1}^{2} \quad (c)$$

$$(c) \Rightarrow \boxed{\mathbf{I_7 = \frac{1}{6}}}.$$

8 Calculons l'intégrale définie I_8 :

Nous savons que :

$$I_8 = \int_{1}^{2} \left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_8 = \int_{1}^{2} x dx + \int_{1}^{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_8 = \int_{1}^{2} x dx + \int_{1}^{2} (-x^{-1/2}) dx \quad (c)$$

$$(c) \Leftrightarrow I_8 = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{1}^{2} + [-2x^{1/2}]_1^2 \quad (d)$$

$(d) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_8 = \frac{7}{2} - 2\sqrt{2}}}$.

9 Calculons l'intégrale définie I_9 :

Nous savons que :

$$I_9 = \int_0^1 \frac{dx}{x+2} \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_9 = [\text{Log}|x+2|]_0^1 \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_9 = [\text{Log}(|x+2|)]_0^1 \quad (c)$$

$$(c) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_9 = \text{Log}3 - \text{Log}2}}.$$

10 Calculons l'intégrale définie I_{10} :

Nous savons que :

$$I_{10} = \int_3^6 e^x(e^x+3)dx \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_{10} = \int_3^6 (e^{2x}+3e^x)dx \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_{10} = \int_3^6 e^{2x}dx + \int_3^6 3e^x dx \quad (c)$$

$$(c) \Leftrightarrow I_{10} = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_3^6 + [3e^x]_3^6 \quad (d)$$

$$(d) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_{10} = \frac{1}{2}e^{12} + \frac{5}{2}e^6 - 3e^3}}.$$

11 Calculons l'intégrale définie I_{11} :

Nous savons que :

$$I_{11} = \int_{-1}^3 x|x|dx \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_{11} = \int_{-1}^0 x(-x)dx + \int_0^3 x(x)dx \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_{11} = \int_{-1}^0 -x^2dx + \int_0^3 x^2dx \quad (c)$$

$$(c) \Leftrightarrow I_{11} = \left[\frac{-x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{3} \quad (d)$$

$$(d) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_{11} = \frac{26}{3}}}.$$

12 Calculons l'intégrale définie I_{12} :

Nous savons que :

$$I_{12} = \int_{2}^{0} \sqrt{|1-x|}\,dx \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_{12} = \int_{2}^{0} (|1-x|)^{1/2} dx \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_{12} = \int_{2}^{1} (x-1)^{1/2} dx + \int_{1}^{0} (1-x)^{1/2} dx \quad (c)$$

$$(c) \Leftrightarrow I_{12} = \left[\frac{2}{3}(x-1)^{3/2}\right]_{2}^{1} + \left[-\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\right]_{1}^{0} \quad (d)$$

$$(d) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_{12} = -\frac{4}{3}}}.$$

13 Calculons l'intégrale définie I_{13} :

Nous savons que :

$$I_{13} = \int_{-1}^{1} (x^2 - \sqrt{|x|})\sqrt[3]{x^2}\,dx \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_{13} = \int_{-1}^{1} (x^2 - (|x|)^{1/2})x^{2/3} dx \quad (b).$$

Or la fonction $f(x) = (x^2 - (|x|)^{1/2})x^{2/3}$ est une fonction paire, d'où :

$$(b) \Leftrightarrow I_{13} = 2\int_{0}^{1} (x^2 - (|x|)^{1/2})\, x^{2/3} dx \quad (c)$$

$$(c) \Leftrightarrow I_{13} = 2\int_{0}^{1} (x^2 - x^{1/2})\, x^{2/3} dx \quad (d)$$

$$(d) \Leftrightarrow I_{13} = 2\int_{0}^{1} (x^{8/3} - x^{7/6})\, dx \quad (e)$$

$$(e) \Leftrightarrow I_{13} = 2\int_0^1 x^{8/3}dx + 2\int_0^1 (-x^{7/6})dx \quad (f)$$

$$(f) \Leftrightarrow I_{13} = 2\left[\frac{3}{11}x^{11/3}\right]_0^1 + 2\left[-\frac{6}{13}x^{13/6}\right]_0^1 \quad (g)$$

$$(g) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_{13} = -\frac{54}{143}}}.$$

14 Calculons l'intégrale définie I_{14} :

Nous savons que :

$$I_{14} = \int_{-2}^{2} (x^3 - \sqrt[3]{x})\ x^2dx \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_{14} = \int_{-2}^{2} (x^3 - x^{1/3})\ x^2dx \quad (b)$$

Or la fonction $f(x) = (x^3 - x^{1/3})x^2$ est une fonction impaire, d'où :

$$(b) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_{14} = 0}}.$$

15 Calculons l'intégrale définie I_{15} :

Nous savons que :

$$I_{15} = \int_{-1}^{1} e^{(-2x+1)}dx \quad (a).$$

Or la fonction $f(x) = e^{(-2x+1)}$ n'est ni une fonction paire, ni une fonction impaire,

d'où : $(a) \Leftrightarrow I_{15} = \left[-\frac{1}{2}e^{(-2x+1)}\right]_{-1}^{1} \quad (b)$

$$(b) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_{15} = -\frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}e^3}}.$$

TRAINING 3

Une intégrale indéfinie est une intégrale sans borne d'intégration.

Ainsi : $\int f(x)dx = F(x) + c, \ c \in \mathbb{R}$.

Calculer les intégrales indéfinies suivantes :

1 $I_1 = \int (3x^2 + 9)dx$.

2 $I_2 = \int (\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{2x})dx$.

3 $I_3 = \int \left(\frac{1}{x^4} + 10\right) dx$.

4 $I_4 = \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right) dx$.

5 $I_5 = \int a^x dx, a \in R_+^* - \{-1\}$.

6 $I_6 = \int (e^{x/a} + e^{-x/a})^2 dx, a \in R^*$.

CORRECTION

1 **Calculons l'intégrale indéfinie I_1 :**

Nous savons que :

$$I_1 = \int (3x^2 + 9)dx \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_1 = \int 3x^2 dx + \int 9dx \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_1 = [x^3] + [9x] \quad (c)$$

$(c) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_1 = x^3 + 9x + c}}$, c étant une constante.

2 Calculons l'intégrale indéfinie I_2 :

Nous savons que :

$$I_2 = \int(\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{2x})dx \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_2 = \int(x^{1/2} - 3(2x)^{1/3})dx \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_2 = \int x^{1/2}dx + (-3)2^{1/3}\int x^{1/3}dx \quad (c)$$

$$(c) \Leftrightarrow I_2 = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right] + (-3)2^{1/3}\left[\frac{3}{4}x^{4/3}\right] \quad (d)$$

$(d) \Rightarrow \boxed{\mathbf{I_2 = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{9}{4}2^{1/3}x^{4/3} + c}}$,c étant une constante.

3 Calculons l'intégrale indéfinie I_3 :

Nous savons que :

$$I_3 = \int\left(\frac{1}{(x)^4} + 10\right)dx \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_3 = \int(x^{-4} + 10)dx \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_3 = \int x^{-4}dx + \int 10dx \quad (c)$$

$$(c) \Leftrightarrow I_3 = \left[-\frac{1}{3}x^{-3}\right] + [10x] \quad (d)$$

$(d) \Rightarrow \boxed{\mathbf{I_3 = -\frac{1}{3}x^{-3} + 10x + c}}$, c étant une constante.

4 Calculons l'intégrale indéfinie I_4 :

Nous savons que :

$$I_4 = \int\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)dx \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_4 = \int\sqrt{x}dx + \int\frac{1}{x}dx \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_4 = \int x^{1/2}dx + \int\frac{1}{x}dx \quad (c)$$

$$(c) \Leftrightarrow I_4 = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right] + [\text{Log}|x|] \quad (d)$$

$$(d) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_4 = \frac{2}{3}x^{3/2} + \text{Log}|x| + c}}, \ c \text{ étant une constante.}$$

5 Calculons l'intégrale indéfinie I_5 :

Nous savons que :

$$I_5 = \int a^x dx, \ a \in R_+^* - \{1\} \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_5 = \int e^{\text{Log}a^x} dx \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_5 = \int e^{x\text{Log}a} dx \quad (c)$$

$$(c) \Leftrightarrow I_5 = \left[\frac{1}{\text{Log}a}e^{x\text{Log}a}\right] \quad (d)$$

$$(d) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_5 = \frac{1}{\text{Log}a}a^x + c}}, \ c \text{ étant une constante.}$$

6 Calculons l'intégrale indéfinie I_6 :

Nous savons que :

$$I_6 = \int (e^{x/a} + e^{-x/a})dx, \ a \in R^* \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_6 = \int (e^{2x/a} + e^{-2x/a} + 2)dx \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_6 = \int e^{2x/a}dx + \int e^{-2x/a}dx + \int 2dx \quad (c)$$

$$(c) \Leftrightarrow I_6 = \left[\frac{a}{2}e^{2x/a}\right] + \left[-\frac{a}{2}e^{-2x/a}\right] + [2x] \quad (d)$$

$$(d) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_6 = \frac{a}{2}e^{2x/a} - \frac{a}{2}e^{-2x/a} + 2x + c}}, \ c \text{ étant une constante.}$$

TRAINING 4

Calculer les intégrales définies suivantes :

1 $I_1 = \int_2^3 \frac{x + 1/2}{x^2 + x - 3} dx$.

2 $I_2 = \int_0^3 \frac{2x + 1}{\sqrt{2x + 1}} dx$.

3 $I_3 = \int_0^1 (1 + x^2) x dx$.

4 $I_4 = \int_0^{e^2} 3(1 + x^3) x^2 dx$.

5 $I_5 = \int_1^5 \sqrt{2x - 1} dx$.

6 $I_6 = \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{25 - 3x}}$.

7 $I_7 = \int_0^1 \frac{x^2}{2 + x^3} dx$.

8 $I_8 = \int_1^2 \frac{dx}{x(1 + \mathrm{Log} x)}$.

9 $I_9 = \int_0^1 \frac{e^x}{(10 - 3e^x)^2} dx$.

10 $I_{10} = \int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$.

11 $I_{11} = \int_0^1 x^2 \sqrt{1 + x^3} dx$.

12 $I_{12} = \int_0^1 e^{-x}(1 + e^x) dx$.

13 $I_{13} = \int_e^{e^2} \frac{1 + \mathrm{Log} x}{x \mathrm{Log} x} dx$.

CORRECTION

1 Calculons I_1 :

$$I_1 = \int_2^3 \frac{x + 1/2}{x^2 + x - 3} dx.$$

Ici : $f(x) = \frac{x + 1/2}{x^2 + x - 3} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{U'(x)}{U(x)}\right)$,

avec : $U(x) = x^2 + x - 3$ et $U'(x) = 2x + 1$.

D'où : $I_1 = \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{U'(x)}{U(x)} dx$

$\Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{2}[\ln(U(x))]_2^3$

$\Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{2}[\ln(x^2 + x - 3)]_2^3$

$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_1 = \frac{\ln(3)}{2}}}$.

2 Calculons I_2 :

$$I_2 = \int_0^3 \frac{2x + 1}{\sqrt{2x + 1}} dx.$$

Ici : $f(x) = \frac{2x + 1}{\sqrt{2x + 1}} \Leftrightarrow f(x) = [U(x)]^{1/2}$,

avec : $U(x) = 2x + 1$.

Nous pouvons aussi écrire :

$f(x) = \frac{1}{2}U'(x) \times (U(x))^{1/2}$, avec : $U'(x) = 2$.

D'où : $I_2 = \frac{1}{2}\int_0^3 U'(x) \times (U(x))^{1/2} dx$

$\Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{U^{3/2}}{3/2}\right]_0^3$

$\Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{3}[U^{3/2}]_0^3$

$$\Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{3}[(2x+1)^{3/2}]_0^3$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_2 = \frac{7\sqrt{7}-1}{3}}}.$$

3 Calculons I_3 :

$I_3 = \int_0^1 x(1+x^2)dx$.

Ici : $f(x) = x(1+x^2) \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}U'(x) \times (U(x))^1$,

avec : $U(x) = 1+x^2$ et $U'(x) = 2x$.

D'où : $I_3 = \frac{1}{2}\int_0^1 U'(x) \times (U(x))^1 dx$

$$\Leftrightarrow I_3 = \frac{1}{2}\left[\frac{(U(x))^2}{2}\right]_0^1$$

$$\Leftrightarrow I_3 = \frac{1}{4}[(U(x))^2]_0^1$$

$$\Leftrightarrow I_3 = \frac{1}{4}[(1+x^2)^2]_0^1$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_3 = \frac{3}{4}}}.$$

4 Calculons I_4 :

$I_4 = \int_1^{e^2} 3(1+x^3)x^2 dx$.

Ici : $f(x) = 3x^2(1+x^3) \Leftrightarrow f(x) = U'(x) \cdot (U(x))^1$,

avec : $U(x) = 1+x^3$ et $U'(x) = 3x^2$.

D'où : $I_4 = \int_1^{e^2} U'(x) \times (U(x))^1 dx$

$$\Leftrightarrow I_4 = \left[\frac{(U(x))^2}{2}\right]_1^{e^2}$$

$$\Leftrightarrow I_4 = \frac{1}{2}[(1+x^3)^2]_1^{e^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_4 = \frac{e^{12}+2e^6-3}{2}}.$$

5 Calculons I_5 :

$$I_5 = \int_1^5 \sqrt{2x-1}\,dx.$$

Ici : $f(x) = \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}U'(x) \times (U(x))^{1/2}$,

avec : $U(x) = 2x-1$ et $U'(x) = 2$.

D'où : $I_5 = \int_1^5 \frac{1}{2}U'(x) \times (U(x))^{1/2}dx$

$$\Leftrightarrow I_5 = \frac{1}{2}\left[\frac{((U(x))^2)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_1^5$$

$$\Leftrightarrow I_5 = \frac{1}{3}[(2x-1)^{3/2}]_1^5$$

$$\Rightarrow \boxed{I_5 = \frac{26}{3}}.$$

6 Calculons I_6 :

$$I_6 = \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{25-3x}}.$$

Ici : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{25-3x}} \Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{3}\frac{U'(x)}{\sqrt{U(x)}}$,

avec : $U(x) = 25-3x$ et $U'(x) = -3$.

D'où : $I_6 = \int_0^3 -\frac{1}{3}\frac{U'(x)}{\sqrt{U(x)}}dx$

$$\Leftrightarrow I_6 = -\frac{1}{3}[2\sqrt{U(x)}]_0^3$$

$$\Leftrightarrow I_6 = -\frac{2}{3}[\sqrt{25-3x}]_0^3$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_6 = \frac{2}{3}}}.$$

7 Calculons I_7 :

$$I_7 = \int_0^1 \frac{x^2}{2+x^3}dx.$$

Ici : $f(x) = \dfrac{x^2}{2+x^3} \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{1}{3}\dfrac{U'(x)}{U(x)}$,

avec : $U(x) = 2+x^3$ et $U'(x) = 3x^2$.

D'où : $I_7 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{3}\frac{U'(x)}{U(x)}dx$

$$\Leftrightarrow I_7 = \frac{1}{3}[\ln(U(x))]_0^1$$

$$\Leftrightarrow I_7 = \frac{1}{3}[\ln[2+x^3]]_0^1$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_7 = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{3}{2}\right)}}.$$

8 Calculons I_8 :

$$I_8 = \int_1^2 \frac{dx}{x(1+\ln x)}.$$

Ici : $f(x) = \dfrac{1}{x(1+\ln x)} \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{U'(x)}{U(x)}$,

avec : $U(x) = 1+\ln x$ et $U'(x) = \dfrac{1}{x}$.

D'où : $I_8 = \displaystyle\int_1^2 \frac{U'(x)}{U(x)}dx$

$$\Leftrightarrow I_8 = [\ln(U(x))]_1^2$$

$$\Leftrightarrow I_8 = [\ln[1+\ln x]]_1^2$$

$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_8 = \ln(1 + \ln 2)}}$.

9 Calculons I_9 :

$I_9 = \int_0^1 \frac{e^x}{(10 - 3e^x)^2} dx$.

Ici : $f(x) = \frac{e^x}{(10 - 3e^x)^2} \Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{3} \frac{U'(x)}{[U(x)]^2}$,

avec : $U(x) = 10 - 3e^x$ et $U'(x) = -3e^x$.

D'où : $I_9 = \int_0^1 -\frac{1}{3} \frac{U'(x)}{[U(x)]^2} dx$

$\Leftrightarrow I_9 = -\frac{1}{3} \int_0^1 \frac{U'(x)}{[U(x)]^2} dx$

$\Leftrightarrow I_9 = -\frac{1}{3} \left[\frac{-1}{U(x)}\right]_0^1$

$\Leftrightarrow I_9 = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{10 - 3e^x}\right]_0^1$

$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_9 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{10 - 3e}\right) - \frac{1}{21}}}$.

10 Calculons I_{10}:

$I_{10} = \int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$.

Ici : $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \Leftrightarrow f(x) = \frac{U'(x)}{U(x)}$,

avec : $U(x) = e^x + e^{-x}$ et $U'(x) = e^x - e^{-x}$.

D'où : $I_{10} = \int_0^1 \frac{U'(x)}{U(x)} dx$

$\Leftrightarrow I_{10} = [\ln(U(x))]_0^1$

$$\Leftrightarrow I_{10} = [\ln[e^x + e^{-x}]]_0^1$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_{10} = \ln\left[\frac{e + e^{-1}}{2}\right]}}.$$

11 Calculons I_{11}:

$$I_{11} = \int_0^1 x^2 \times \sqrt{1 + x^3}\,dx.$$

Ici : $f(x) = x^2 \times \sqrt{1 + x^3} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{3}U'(x) \times (U(x))^{1/2}$,

avec : $U(x) = 1 + x^3$ et $U'(x) = 3x^2$.

D'où : $I_{11} = \int_0^1 \frac{1}{3}U'(x)(U(x))^{1/2}dx$

$$\Leftrightarrow I_{11} = \frac{1}{3}\left[\frac{(U(x))^{3/2}}{3/2}\right]_0^1$$

$$\Leftrightarrow I_{11} = \frac{2}{9}[(1 + x^3)^{3/2}]_0^1$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_{11} = \frac{4\sqrt{2}}{9} - \frac{2}{9}}}.$$

12 Calculons I_{12}:

$$I_{12} = \int_0^1 e^{-x}(1 + e^x)dx.$$

Ici : $f(x) = e^{-x}(1 + e^x) \Leftrightarrow f(x) = U(x)\left(1 + \frac{1}{U(x)}\right)$,

avec : $U(x) = e^{-x}$ et $\frac{1}{U(x)} = e^x$.

D'où : $I_{12} = \int_0^1 U(x)\left(1 + \frac{1}{U(x)}\right)dx$

$$\Leftrightarrow I_{12} = \int_0^1 (U(x) + 1)dx$$

$$\Leftrightarrow I_{12} = \int_0^1 (e^{-x} + 1)dx$$

$\Leftrightarrow I_{12} = [-e^{-x} + x]_0^1$

$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_{12} = 2 - e^{-1}}}$.

13 Calculons I_{13}:

$I_{13} = \int_e^{e^2} \frac{1 + \ln x}{x \ln x} dx$.

Ici : $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x \ln x} \Leftrightarrow f(x) = \frac{U'(x)}{U(x)}$,

avec : $U(x) = x \ln x$ et $U'(x) = 1 + \ln x$.

D'où : $I_{13} = \int_e^{e^2} \frac{U'(x)}{U(x)} dx$

$\Leftrightarrow I_{13} = [\ln(U(x))]_e^{e^2}$

$\Leftrightarrow I_{13} = [\ln[x \ln x]]_e^{e^2}$

$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_{13} = 1 + \ln 2}}$.

INTÉRROS
LYCÉES

INTERRO. 1

1 **Soit** $I = \int_3^4 \frac{7dx}{\sqrt{x^2+2}}$.

ⓐ. **Calculer la dérivée de** $g(x) = \sqrt{x^2+2}$.

ⓑ. **En déduire sur** $[3,4]$ f'**, avec** $f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+2})$.

ⓒ. **Que vaut alors** I **?**

2 ⓐ. **Calculer l'intégrale** $I = \int_2^4 \left(\frac{6x-3}{x-1}\right)dx$**, en mettant** I **sous la forme :**

$$I = 3\int_2^4 \left(a + \frac{b}{x-1}\right)dx.$$

ⓑ. **En déduire la valeur moyenne de** f **sur** $[2,4]$ **avec :**

$$f(x) = \frac{6x-3}{x-1}.$$

CORRECTION

1 ⓐ. **Calculons** g' :

$g(x) = \sqrt{x^2+2}$.

Posons : $g = \sqrt{g_1}$ avec : $g_1(x) = x^2+2$.

g_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme et $g_1(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

De plus, la fonction racine est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme composée, et nous pouvons calculer g'.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}}.$$

ⓑ. **Sur $[3,4]$, déduisons en f' :**

$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 2})$.

Posons : $f = \ln(g_2 + g)$ avec : $g_2(x) = x$.

g_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme et g est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après a), par conséquent $(g_2 + g)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de 2 fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$(g_2 + g)$ est donc dérivable sur $[3,4]$.

De plus : $\forall x \in [3,4]$, $(g_2 + g)(x) > 0$ et la fonction ln est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Donc f est dérivable sur $[3,4]$, comme composée, et nous pouvons calculer f'.

$$\boxed{\forall x \in [3,4]\ ,\ f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}}}.$$

ⓒ. **Déterminons la valeur de I :**

$$I = 7\int_3^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}}\right) dx.$$

Par conséquent : $I = 7[\ln(x + \sqrt{x^2 + 2})]_3^4$

$$\Rightarrow \boxed{I = 7\ln\left(\frac{4 + \sqrt{18}}{3 + \sqrt{11}}\right)}.$$

2 ⓐ. **Déterminons *a* et *b* :**

$$\frac{6x - 3}{x - 1} = 3\left(a + \frac{b}{x - 1}\right)$$

$$\Leftrightarrow 6x - 3 = 3(a(x - 1) + b)$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = ax + (b - a).$$

Par identification, nous avons : $\begin{cases} a = 2 \\ b - a = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}}$.

Calculons alors I :

$$I = \int_2^4 3\left(2 + \frac{1}{x - 1}\right) dx.$$

$f(x) = \dfrac{6x-3}{x-1}$ est continue sur $[2,4]$, elle admet donc des primitives sur $[2,4]$ et par conséquent I existe.

$$I = 3\int_2^4 \left(2 + \frac{1}{x-1}\right) dx$$

$$\Leftrightarrow I = 3[2x + \ln(x-1)]_2^4$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I = 12 + 3\ln 3}}.$$

ⓑ. **Déduisons-en la valeur moyenne de f sur $[2,4]$:**

D'après le cours, elle correspond au nombre μ tel que : $\mu = \dfrac{1}{4-2}\displaystyle\int_2^4 f(x)dx$.

Ici, nous avons donc : $\mu = \dfrac{1}{2}I \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\mu = 6 + 1{,}5\ln 3}}$.

INTERRO. 2

1 **Soit $f(x) = \dfrac{2x^2}{3(x-1)^2}$, avec : $\mathcal{D}f = \mathbb{R} - \{1\}$.**

ⓐ. **Déterminer $a,b,c \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in]1, +\infty[, f(x) = a + \dfrac{b}{(x-1)} + \dfrac{c}{(x-1)^2}$.**

ⓑ. **Calculer alors : $I = \displaystyle\int_3^7 f(x)dx$.**

ⓒ. **En déduire la valeur moyenne de f sur $[3,7]$.**

2 **$\forall n \in \mathbb{N}, K_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x + 1}dx, \forall x \in \mathbb{R}$.**

ⓐ. **Calculer K_1 et $K_0 + K_1$ et en déduire K_0.**

ⓑ. **Déterminer $K_{n+1} + K_n$.**

ⓒ. **En déduire K_2 et K_3.**

CORRECTION

1 ⓐ. **Déterminons a, b, c :**

$\forall x \in]1, +\infty[$, nous avons alors :

$$\frac{2x^2}{3(x-1)^2} = a + \frac{b}{(x-1)} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2}{3(x-1)^2} = \frac{a(x-1)^2 + b(x-1) + c}{(x-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x^2 = a(x^2 + 1 - 2x) + b(x-1) + c.$$

Par identification, nous avons :

$$\begin{cases} a = 2/3 \\ -2a + b = 0 \\ a - b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \boldsymbol{a = 2/3} \\ \boldsymbol{b = 4/3} \\ \boldsymbol{c = 2/3} \end{cases}}.$$

ⓑ. **Calculons I :**

Soit $f(x) = \dfrac{2x^2}{3(x-1)^2}$. f est continue sur $[3,7]$, elle admet donc des primitives sur $[3,7]$ et par conséquent I existe.

$$I = \frac{2}{3}\int_3^7 \frac{x^2}{(x-1)^2}dx \Leftrightarrow I = \frac{1}{3} \cdot \int_3^7 \left(2 + \frac{4}{(x-1)} + \frac{2}{(x-1)^2}\right)dx$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{1}{3} \cdot \left[2x + 4\ln(x-1) - \frac{2}{(x-1)}\right]_3^7$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{26}{3} + 4\ln 3\right)}}.$$

ⓒ. **Déduisons-en la valeur moyenne de f sur $[3{,}7]$:**

D'après le cours, elle correspond au nombre μ tel que : $\mu = \dfrac{1}{7-3}\displaystyle\int_3^7 f(x)dx$.

Ici, nous avons donc : $\mu = \dfrac{1}{4} I \Rightarrow \boxed{\mu = \dfrac{1}{12}\cdot\left(\dfrac{26}{3} + 4\ln 3\right)}$.

2 ⓐ. **Calculons K_1, $K_0 + K_1$ et déduisons-en K_0 :**

Soit $f(x) = \dfrac{e^{nx}}{e^x + 1}$, $\forall x \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$. D'une manière générale, f est continue sur $[0{,}1]$, elle admet donc des primitives sur $[0{,}1]$ et par conséquent K_n existe.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer K_1 et K_0.

- $K_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx \Leftrightarrow K_1 = \int_0^1 \frac{U'(x)}{U(x)}dx$, avec : $U(x) = e^x + 1$ et $U'(x) = e^x$.

D'où : $K_1 = [\ln(U(x))]_0^1 \Leftrightarrow K_1 = [\ln(e^x + 1)]_0^1$

$\Rightarrow K_1 = \ln(e+1) - \ln 2 \Rightarrow \boxed{K_1 = \ln\left(\dfrac{e+1}{2}\right)}$.

- $K_0 + K_1 = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{e^x+1} + \frac{e^x}{e^x+1}\right)dx$

$\Leftrightarrow K_0 + K_1 = \displaystyle\int_0^1 dx$

$\Leftrightarrow K_0 + K_1 = [x]_0^1$

$\Rightarrow \boxed{K_0 + K_1 = 1}$.

- Par conséquent : $K_0 = 1 - K_1 \Rightarrow \boxed{K_0 = 1 - \ln\left(\dfrac{e+1}{2}\right)}$.

ⓑ. **Déterminons $K_{n+1} + K_n$:**

$$K_{n+1} + K_n = \int_0^1 \frac{e^{(n+1)x} + e^{nx}}{e^x + 1}dx$$

$$\Leftrightarrow K_{n+1} + K_n = \int_0^1 e^{nx}\left(\frac{e^x + 1}{e^x + 1}\right)dx$$

$$\Leftrightarrow K_{n+1} + K_n = \int_0^1 e^{nx}dx \Leftrightarrow K_{n+1} + K_n = \frac{1}{n}[e^{nx}]_0^1$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{K_{n+1} + K_n = \frac{e^n - 1}{n}}}.$$

ⓒ. **Déduisons-en K_2 et K_3 :**

D'une manière générale nous avons donc : $\boxed{\boldsymbol{K_{n+1} = \left(\frac{e^n - 1}{n}\right) - K_n}}$.

D'où : ▪ $K_2 = (e-1) - K_1 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{K_2 = (e-1) - \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)}}$;
$(\boldsymbol{n = 1})$

▪ $K_3 = \left(\frac{e^2 - 1}{2}\right) - K_2 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{K_3 = \left(\frac{e^2 - 1}{2}\right) - (e-1) + \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)}}$.
$(\boldsymbol{n = 2})$

INTERRO. 3

1 **Soit $I_n = \int_0^1 \frac{4x^n}{e^x + x + 1}dx$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.**

Sachant que l'on a : $1 \le e^x + x \le e + 1$, déterminer un encadrement de I_n.

2 **Montrer que :**

▪ $\frac{1}{5} \le \int_1^3 \frac{1}{1+x^2}dx \le 1$ **(1)**

▪ $\frac{1}{\sqrt{5}} \le \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx \le \frac{1}{2}$ **(2)**.

3 **Soit** $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+2x+4x^2}dx$, $n \in \mathbb{N}$.

ⓐ. **Déterminer les constantes** $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ **telles que :**

$$\forall x \in [0, 1],\ C_1 \leq \frac{1}{1+2x+4x^2} \leq C_2 .$$

ⓑ. **En déduire un encadrement de** I_n **sur** $[0,1]$ **et la limite de** I_n **quand** n **tend vers** $+\infty$.

CORRECTION

1 Déterminons un encadrement de I_n :

D'après l'énoncé : $1 \leq e^x + x \leq e + 1$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow 1 + 1 \leq e^x + x + 1 \leq e + 1 + 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq e^x + x + 1 \leq e + 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e+2} \leq \frac{1}{e^x + x + 1} \leq \frac{1}{2} \quad (2),$$

car sur $[0,1]$, tous ces termes sont strictement positifs.

$$(2) \Leftrightarrow \frac{4x^n}{e+2} \leq \frac{4x^n}{e^x+x+1} \leq \frac{4x^n}{2} \quad (3), \text{ car } x^n > 0 \text{ sur } [0,1].$$

- Soient les fonctions : $g(x) = \frac{4x^n}{e+2}$, $f(x) = \frac{4x^n}{e^x+x+1}$ et $h(x) = \frac{4x^n}{2}$.

g, f et h sont continues sur $[0,1]$, elles admettent donc des primitives sur $[0,1]$ et par conséquent : $\int_0^1 g(x)dx$, $\int_0^1 f(x)dx$ et $\int_0^1 h(x)dx$ existent.

- De plus, les fonctions g, f et h sont positives sur $[0,1]$.
- Enfin, les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant.

Les conditions étant réunies,

$$(3) \Leftrightarrow \int_0^1 \left(\frac{4x^n}{e+2}\right) dx \le \int_0^1 \left(\frac{4x^n}{e^x + x + 1}\right) dx \le \int_0^1 \left(\frac{4x^n}{2}\right) dx$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{e+2}\right) \cdot \left[\frac{x^{(n+1)}}{(n+1)}\right]_0^1 \le I_n \le 2 \cdot \left[\frac{x^{(n+1)}}{(n+1)}\right]_0^1$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\frac{4}{(n+1)(e+2)} \le I_n \le \frac{2}{(n+1)}}}.$$

2 ⓐ. **Montrons (1)** :

$\forall x \in [1,3]$, $1 \le x \le 3 \Leftrightarrow 1 \le x^2 \le 9$

$\Leftrightarrow 2 \le 1 + x^2 \le 10$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{10} \le \frac{1}{1+x^2} \le \frac{1}{2} \qquad (1'),$$

car sur $[1,3]$, tous ces termes sont strictement positifs.

- Soient les fonctions : $g(x) = \dfrac{1}{10}$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et $h(x) = \dfrac{1}{2}$.

g, f et h sont continues sur $[1,3]$, elles admettent donc des primitives sur $[1,3]$ et par conséquent : $\int_1^3 g(x)dx$, $\int_1^3 f(x)dx$ et $\int_1^3 \frac{1}{2}dx$ existent.

- De plus, les fonctions g, f et h sont positives sur $[1,3]$.
- Enfin, les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant.

Les conditions étant réunies,

$$(1') \Leftrightarrow \int_1^3 \left(\frac{1}{10}\right) dx \le \int_1^3 \left(\frac{1}{1+x^2}\right) dx \le \int_1^3 \left(\frac{1}{2}\right) dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{10}[x]_1^3 \le \int_1^3 \left(\frac{1}{1+x^2}\right) dx \le \frac{1}{2} \cdot [x]_1^3$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\frac{1}{5} \le \int_1^3 \left(\frac{1}{1+x^2}\right) dx \le 1}}.$$

ⓑ. **Montrons (2)** :

$\forall x \in [0,1/2]$, $0 \le x \le 1/2 \Leftrightarrow 0 \le x^2 \le 1/4$

$\Leftrightarrow 1 \le 1 + x^2 \le 5/4$

$\Leftrightarrow 1 \le \sqrt{1+x^2} \le \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, avec $1 + x^2 > 0$, $\forall x \in [0,1/2]$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{\sqrt{5}} \le \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \le 1 \quad (2')$,

car sur $[0,1/2]$, tous ces termes sont strictement positifs.

- Soient les fonctions : $g(x) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $h(x) = 1$.

g, f et h sont continues sur $[0,1/2]$, elles admettent donc des primitives sur $[0,1/2]$ et par conséquent : $\int_0^{1/2} g(x)dx$, $\int_0^{1/2} f(x)dx$ et $\int_0^{1/2} h(x)dx$ existent.

- De plus, les fonctions g, f et h sont positives sur $[0,1/2]$.
- Enfin, les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant.

Les conditions étant réunies,

$$(2') \Leftrightarrow \int_0^{1/2}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)dx \le \int_0^{1/2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx \le \int_0^{1/2} dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot [x]_0^{1/2} \le \int_0^{1/2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx \le [x]_0^{1/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{\frac{1}{\sqrt{5}} \le \int_0^{1/2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx \le \frac{1}{2}}}.$$

3 ⓐ. **Déterminons les constantes C_1 et C_2** :

$\forall x \in [0,1]$, $0 \le x \le 1 \Leftrightarrow 0 \le 4x^2 \le 4$

$\Leftrightarrow 0 \le 2x + 4x^2 \le 6$

$\Leftrightarrow 1 \leq 1 + 2x + 4x^2 \leq 7$

$\Leftrightarrow \frac{1}{7} \leq \frac{1}{1 + 2x + 4x^2} \leq 1 \quad (1)$,

car sur $[0,1]$, tous ces termes sont strictement positifs.

$(1) \Leftrightarrow C_1 \leq \frac{1}{1 + 2x + 4x^2} \leq C_2 \quad (2)$.

Donc : $\boxed{\boldsymbol{C_1 = \frac{1}{7} \text{ et } C_2 = 1}}$.

ⓑ. **Encadrons alors I_n et déterminons limite I_n quand $n \to +\infty$:**

$(2) \Leftrightarrow \frac{x^n}{7} \leq \frac{x^n}{1 + 2x + 4x^2} \leq x^n$ (3), car $x^n > 0$ sur $[0,1]$.

- Soient les fonctions : $g(x) = \frac{x^n}{7}$, $f(x) = \frac{x^n}{1 + 2x + 4x^2}$ et $h(x) = x^n$.

g, f et h sont continues sur $[0,1]$, elles admettent donc des primitives sur $[0,1]$ et par conséquent : $\int_0^1 g(x)dx$, $\int_0^1 f(x)dx$ et $\int_0^1 h(x)dx$ existent.

- De plus, les fonctions g, f et h sont positives sur $[0,1]$.
- Enfin, les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant.

Les conditions étant réunies,

$$(3) \Leftrightarrow \frac{1}{7}\left[\frac{x^{(n+1)}}{(n+1)}\right]_0^1 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1 + 2x + 4x^2}dx \leq \left[\frac{x^{(n+1)}}{(n+1)}\right]_0^1$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\frac{1}{7(n+1)} \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1 + 2x + 4x^2}dx \leq \frac{1}{(n+1)}}}.$$

Ici : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{7(n+1)} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{(n+1)} = 0$,

d'où, d'après le théorème des gendarmes nous pouvons affirmer que : $\boxed{\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0}}$.

INTERRO. 4

1 **Soit $f(x)$ définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = 3x^2 + 7 - 4\ln x$.**

ⓐ. Montrer que $H(x) = x\ln x - x$ est une primitive de $h(x) = \ln x$, sur $]0, +\infty[$.

ⓑ. En déduire alors une primitive F de f sur $[1;5]$.

ⓒ. Quelle est la primitive G de f qui s'annule en $x_0 = 4$?

ⓓ. Calculer la valeur moyenne "m" de f sur $[1;5]$.

2 **Soit $J = \int_1^2 \left(\frac{2t}{1+t}\right) \cdot dt$, pourquoi peut-on affirmer que : $J \in \left[1; \frac{4}{3}\right]$?**

3 **Calculer $I = \int_{-1}^2 (x^2 + 1)dx$.**

CORRECTION

1 **ⓐ. Montrons que H est une primitive de h sur** $]0, +\infty[$:

▪ Soit $h(x) = \ln x$. h est continue sur $]0, +\infty[$, elle admet donc des primitives sur $]0, +\infty[$ et par conséquent : $h(x) = \int h(x)dx$ existe.

▪ Ici, H est une primitive de h ssi : $\forall x \in]0, +\infty[$, $H'(x) = h(x)$.

$H'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{H'(x) = \ln x}}$.

Donc **oui**, H est bien une primitive de h sur $]0, +\infty[$.

ⓑ. Déduisons-en une primitive F de f sur $[1;5]$:

Soit $f(x) = 3x^2 + 7 - 4\ln x$. f est continue sur $]0, +\infty[$ donc sur $[1;5]$, elle admet donc des primitives sur $[1;5]$ et par conséquent : $F(x) = \int f(x)dx$ existe.

$F(x) = \int (3x^2 + 7 - 4\ln x)dx \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{F(x) = x^3 + 11x - 4x\ln x}}$.

ⓒ. Déterminons une primitive G de f qui s'annule en $x_0 = 4$:

D'une manière générale, les primitives de f sur $]0, +\infty[$ et donc sur $[1;5]$ sont de la forme : $G(x) = F(x) + c$, c étant une constante appartenant à $\mathbb{R}$.

$$G(x) = F(x) + c \Leftrightarrow G(x) = (x^3 + 11x - 4x \cdot \ln x) + c.$$

$$G(x_0) = 0 \Leftrightarrow G(4) = 0 \Leftrightarrow (64 + 44 - 16\ln 4) + c = 0$$

$$\Leftrightarrow 108 - 32\ln 2 + c = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{c = -108 + 32\ln 2}}.$$

Au total, une primitive G de f qui s'annule en $x_0 = 4$ est :

$$\boxed{\mathbf{G(x) = x^3 + 11x - 4x \cdot \ln x + (-108 + 32\ln 2)}}.$$

ⓓ. Calculons la valeur moyenne de f sur $[1;5]$:

Soit $"m"$, la valeur moyenne de f sur $[1;5]$,

m est telle que : $m = \dfrac{1}{5-1} \cdot \displaystyle\int_1^5 f(x)dx \quad (1)$.

$$(1) \Leftrightarrow m = \frac{1}{4} \cdot [x^3 + 11x - 4x \cdot \ln x]_1^5 \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow m = \frac{1}{4} \cdot (168 - 20\ln 5) \quad (3)$$

$$(3) \Rightarrow \boxed{\mathbf{m = 42 - 5\ln 5}}.$$

2 Montrons pourquoi $J \in \left[1; \frac{4}{3}\right]$:

$J = \displaystyle\int_1^2 \left(\frac{2t}{1+t}\right) dt$.

$\forall t \in [1,2]$, $1 \leq t \leq 2 \Leftrightarrow 2 \leq 2t \leq 4$ (a).

De plus, $\forall t \in [1,2]$, $1 \leq t \leq 2 \Leftrightarrow 2 \leq 1 + t \leq 3$ (b).

Sur $[1, 2]$, $2t > 0$ et $1 + t > 0$, par conséquent : $\dfrac{2}{2} \leq \dfrac{2t}{1+t} \leq \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{1 \leq \dfrac{2t}{1+t} \leq \dfrac{4}{3}}}$ (c).

- Soient les fonctions : $g(t) = 1$, $f(t) = \dfrac{2t}{1+t}$ et $h(t) = 4/3$.

g, f et h sont continues sur $[1, 2]$, elles admettent donc des primitives sur $[1, 2]$ et par conséquent : $\int_1^2 g(t)dt$, $\int_1^2 f(t)dt$ et $\int_1^2 h(t)dt$ existent.

- De plus, les fonctions g, f et h sont positives sur $[1, 2]$.
- Enfin, les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant.

Les conditions étant réunies,

$$(c) \Leftrightarrow \int_1^2 (1) \cdot dt \leq \int_1^2 \left(\frac{2t}{1+t}\right) \cdot dt \leq \int_1^2 \left(\frac{4}{3}\right) \cdot dt$$

$$\Leftrightarrow [t]_1^2 \leq \int_1^2 \left(\frac{2t}{1+t}\right) dt \leq \frac{4}{3}[t]_1^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{1 \leq J \leq 4/3}}.$$

3 Calculons I :

Cela revient à calculer $I = \int_{-1}^{2} (x^2 + 1)dx$.

Soit $f(x) = x^2 + 1$. f est continue sur $[-1, 2]$, elle admet donc des primitives sur $[-1, 2]$ et par conséquent : $I = \int_{-1}^{2} (x^2 + 1)dx$ existe.

Dans ces conditions : $I = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^{2} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I = 6}}$.

INTERRO. 5

1 ***On rappelle que si f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$, alors la fonction F définie sur $[a, b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur $[a, b]$ qui s'annule en a.***

Soit $F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{2t} dt$, $\forall t \in [1, +\infty[$.

ⓐ. Montrer que la fonction $f(t) = \frac{\ln t}{2t}$ est positive sur $[1, +\infty[$.

ⓑ. Déterminer alors l'unique primitive de f sur $[1, +\infty[$ qui s'annule en $x_0 = 1$.

2 Une entreprise a pour coût marginal de production :

$$C_m(q) = 3q^2 - 24q + 70, \quad q \in]0, 10].$$

ⓐ. Définir la notion de coût marginal et donner sa formule en microéconomie.
ⓑ. En déduire la fonction de coût total de l'entreprise si elle ne possède pas de coût fixe.
ⓒ. Même question si la firme a des coûts fixes égaux à :
$CF = 300$ u.c (unités de compte).
ⓓ. Calculer alors le coût moyen du producteur $CM(q)$, ainsi que sa dérivée quand il y a absence de coût fixe.
ⓔ. Montrer que le coût moyen et le coût marginal s'intersectent au minimum du coût moyen.

3 Déterminer la primitive F de $f(x) = \frac{-2}{x^2}$ sur $]-\infty, 0[$ avec : $F(-1) = 3$.

CORRECTION

1 ⓐ. Montrons que la fonction f est positive sur $[1, +\infty[$:

Ici : $f(t) = \frac{\ln t}{2t}$.

Sur $[1, +\infty[$, $\ln t \geq 0$ et $2t > 0$.

Par conséquent : comme f est le quotient de 2 fonctions positives, le dénominateur ne s'annulant pas sur $[1, +\infty[$, nous pouvons affirmer que : $\boxed{\forall t \in [1, +\infty[, f(t) \geq 0}$.

ⓑ. Déterminons l'unique primitive recherchée :

Soit $f(t) = \frac{\ln t}{2t}$, f est continue et positive sur $[1, +\infty[$. Par conséquent, la fonction F définie sur $[1, +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur $[1, +\infty[$ qui s'annule en $x_0 = 1$.

$F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{2t}dt \Leftrightarrow F(x) = \int_1^x \frac{1}{2}U'(t) \times U(t)dt$, avec : $U(t) = \ln t$ et $U'(t) = \frac{1}{t}$.

Dans ces conditions : $F(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} \cdot U(t)^2\right]_1^x \Leftrightarrow F(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} \cdot (\ln t)^2\right]_1^x$

$$\Leftrightarrow F(x) = \frac{1}{4}[(\ln t)^2]_1^x \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{F(x) = \frac{1}{4}(\ln x)^2}}.$$

2 ⓐ. ⓐ1. Définissons la notion de coût marginal en microéconomie :
Nous savons que le coût marginal $Cm(q)$ correspond au supplément de coût résultant de la fabrication d'une unité supplémentaire d'output (output = produit).

ⓐ2. Donnons sa formule :
Soit $C(q)$, la fonction de coût total de l'entreprise, avec $q > 0$, la fonction de coût marginal est alors donnée par la formule : $\boxed{\boldsymbol{Cm(q) = C'(q)}}$.

ⓑ. Déterminons la fonction de coût total de la firme avec $CF = 0$:

Comme $Cm(q) = C'(q)$, nous pouvons en déduire que : $C(q) = \int Cm(q) \cdot dq$.

Soit $f(x) = 3x^2 - 24x + 70$. f est continue sur $]0, +\infty[$, donc sur $]0, 10]$, elle admet donc des primitives sur $]0, 10]$ et par conséquent : $\int f(x)dx$ existe.

$$C(q) = \int(3q^2 - 24q + 70)dq \Leftrightarrow C(q) = [q^3 - 12q^2 + 70q]$$

$$\Rightarrow C(q) = q^3 - 12q^2 + 70q + C, C \in \mathbb{R}.$$

Or $CF = 0$ signifie : $C(0) = 0 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{C = 0}}$.

Au total, la fonction de coût total de la firme, sans coût fixe (loyer, etc...) est :

$$\boxed{\boldsymbol{C(q) = q^3 - 12q^2 + 70q}}.$$

ⓒ. Même question avec $CF = 300$ U.C. :
$CF = 300$ signifie $C(0) = 300 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{C = 300}}$.

Dans ces conditions, en présence de coûts fixes, la fonction de coût total s'écrit :

$$\boxed{\boldsymbol{C(q) = q^3 - 12q^2 + 70q + 300}}.$$

ⓓ. Calculons $CM(q)$ et $CM'(q)$ quand $CF = 0$:

- $CM(q)$ nous est donné par la formule : $\boxed{\boldsymbol{CM(q) = \frac{C(q)}{q}}}$.

D'où : $\boxed{\boldsymbol{CM(q) = q^2 - 12q + 70}}$.

- $\boxed{\boldsymbol{CM'(q) = 2q - 12}}$, $CM(q)$ étant dérivable sur $]0, +\infty[$ et donc sur $]0, 10]$, comme fonction polynôme.

ⓔ. ⓔ1. Déterminons le minimum du coût moyen :

Le minimum du coût moyen est tel que : $CM'(q) = 0$, avec $CM''(q) > 0$.

$CM'(q) = 0 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{q_{min} = 6}}$ et $CM''(q) = 2 > 0$.

ⓔ2. Déterminons la valeur particulière de q qui correspond à l'intersection du coût moyen et du coût marginal :

Soit q^*, cette valeur, q^* est telle que : $CM(q) = Cm(q)$.

$$CM(q) = Cm(q) \Leftrightarrow q^2 - 12q + 70 = 3q^2 - 24q + 70 \Leftrightarrow 2q^2 - 12q = 0$$

$$\Leftrightarrow q(q-6) = 0 \Rightarrow q^* = 0 \text{ ou } q^* = 6.$$

Nous retiendrons $\boxed{\boldsymbol{q^* = 6}}$ car c'est la seule valeur strictement positive.

Au total, nous avons bien $\boxed{\boldsymbol{q_{min} = q^* = 6}}$.

3 Déterminons la primitive F de f sur $]-\infty, 0[$ avec $F(-1) = 3$:

Soit $f(x) = \frac{-2}{x^2}$. f est continue sur $]-\infty, 0[$, elle admet donc des primitives sur $]-\infty, 0[$ et par conséquent : $F(x) = \int \left(\frac{-2}{x^2}\right) \cdot dx$ existe.

- $F(x) = \int \left(\frac{-2}{x^2}\right) \cdot dx \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{F(x) = \frac{2}{x} + C, C \in \mathbb{R}}}$.

- Or on désire $F(-1) = 3$, d'où : $\boxed{\boldsymbol{C = 5}}$.

Au total, la primitive F de f sur $]-\infty, 0[$ avec $F(-1) = 3$ est : $\boxed{\boldsymbol{F(x) = \frac{2}{x} + 5}}$.

COACHING
ALAIN PILLER
DEPUIS 1991

MATHS
TERMINALES
S ~ ES

1

COURS
ÉCO-GESTION
L1~L2~L3

Déchire Tout !!!

ACHETER
LES LIVRES
D'ALAIN PILLER

⊕ CORRIGÉS

ANNALES BAC
CORRIGÉES

2

9 782915 857757
ISBN : 2915857757

Diffusion Belin

PRIX : 6 €

PREMIUM ÉDITEUR