Sujet + Corrigé

ANNALES MATHÉMATIQUES BAC S

SUITES - 2014

SUJET 2
AMÉRIQUE DU NORD
BAC S - 2014

Correction Réalisée

Par Alain PILLER

alainpiller.fr

Annales Mathématiques Bac 2014
Sujets + Corrigés - Alain Piller
Amérique du Nord

Alain PILLER — Sujet 2

Exercice 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, tous les résultats demandés seront arrondis à 10^{-3} près.

Une grande enseigne de cosmétiques lance une nouvelle crème hydratante.

Partie A : Conditionnement des pots

Cette enseigne souhaite vendre la nouvelle crème sous un conditionnement de 50 mL et dispose pour ceci de pots de contenance maximale 55 mL.
On dit qu'un pot de crème est non conforme s'il contient moins de 49 mL de crème.

1. Plusieurs séries de tests conduisent à modéliser la quantité de crème, exprimée en mL, contenue dans chaque pot par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart-type $\sigma = 1,2$.
   Calculer la probabilité qu'un pot de crème soit non conforme.
2. La proportion de pots de crème non conformes est jugée trop importante. En modifiant la viscosité de la crème, on peut changer la valeur de l'écart-type de la variable aléatoire X, sans modifier son espérance $\mu = 50$. On veut réduire à 0,06 la probabilité qu'un pot choisi au hasard soit non conforme.
   On note σ' le nouvel écart-type, et Z la variable aléatoire égale à $\dfrac{X-50}{\sigma'}$
   a. Préciser la loi que suit la variable aléatoire Z.
   b. Déterminer une valeur approchée du réel u tel que $p(Z \leqslant u) = 0,06$.
   c. En déduire la valeur attendue de σ'.
3. Une boutique commande à son fournisseur 50 pots de cette nouvelle crème.
   On considère que le travail sur la viscosité de la crème a permis d'atteindre l'objectif fixé et donc que la proportion de pots non conformes dans l'échantillon est 0,06.
   Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de pots non conformes parmi les 50 pots reçus.
   a. On admet que Y suit une loi binomiale. En donner les paramètres.
   b. Calculer la probabilité que la boutique reçoive deux pots non conformes ou moins de deux pots non conformes.

Partie B : Campagne publicitaire

Une association de consommateurs décide d'estimer la proportion de personnes satisfaites par l'utilisation de cette crème.
Elle réalise un sondage parmi les personnes utilisant ce produit. Sur 140 personnes interrogées, 99 se déclarent satisfaites.
Estimer, par intervalle de confiance au seuil de 95 %, la proportion de personnes satisfaites parmi les utilisateurs de la crème.

Exercice 2 **6 points**
Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 5\mathrm{e}^{-x} - 3\mathrm{e}^{-2x} + x - 3.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f et $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x - 3$ dans un repère orthogonal du plan.

Partie A : Positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = f(x) - (x-3)$.

1. Justifier que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $g(x) > 0$.
2. La courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$ ont-elles un point commun ? Justifier.

Partie B : Étude de la fonction g

On note M le point d'abscisse x de la courbe $\mathscr{C}_f$, N le point d'abscisse x de la droite $\mathscr{D}$ et on s'intéresse à l'évolution de la distance MN.

1. Justifier que, pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, la distance MN est égale à $g(x)$.
2. On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   Pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, calculer $g'(x)$.
3. Montrer que la fonction g possède un maximum sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ que l'on déterminera.
   En donner une interprétation graphique.

Partie C : Étude d'une aire

On considère la fonction $\mathscr{A}$ définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$\mathscr{A}(x) = \int_0^x [f(t) - (t-3)]\,\mathrm{d}t.$$

1. Hachurer sur le graphique donné en **annexe 1 (à rendre avec la copie)** le domaine dont l'aire est donnée par $\mathscr{A}(2)$.
2. Justifier que la fonction $\mathscr{A}$ est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
3. Pour tout réel x strictement positif, calculer $\mathscr{A}(x)$.
4. Existe-t-il une valeur de x telle que $\mathscr{A}(x) = 2$?

Exercice 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

On considère un cube ABCDEFCH donné en annexe 2 (à rendre avec la copie).
On note M le milieu du segment [EH], N celui de [FC] et P le point tel que $\overrightarrow{\mathrm{HP}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{HG}}$.

Partie A : Section du cube par le plan (MNP)

1. Justifier que les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point L.
   Construire le point L
2. On admet que les droites (LN) et (CG) sont sécantes et on note T leur point d'intersection.
   On admet que les droites (LN) et (BF) sont sécantes et on note Q leur point d'intersection.
   a. Construire les points T et Q en laissant apparents les traits de construction.
   b. Construire l'intersection des plans (MNP) et (ABF).
3. En déduire une construction de la section du cube par le plan (MNP).

Partie B

L'espace est rapporté au repère $\left(A\,;\, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Donner les coordonnées des points M, N et P dans ce repère.
2. Déterminer les coordonnées du point L.
3. On admet que le point T a pour coordonnées $\left(1\,;\,1\,;\,\frac{5}{8}\right)$.
   Le triangle TPN est-il rectangle en T ?

Sujet Mathématiques Bac 2014
suites S - corrigé

Exercice 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un volume constant de 2 200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B.
Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de pompes.
On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante :

- au départ, le bassin A contient 800 m^3 d'eau et le bassin B contient 1 400 m^3 d'eau ;
- tous les jours, 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B au début de la journée est transféré vers le bassin A ;
- tous les jours, 10 % du volume d'eau présent dans le bassin A au début de la journée est transféré vers le bassin B.

Pour tout entier naturel n, on note :

- a_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin A à la fin du n-ième jour de fonctionnement ;
- b_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin B à la fin du n-ième jour de fonctionnement.

On a donc $a_0 = 800$ et $b_0 = 1\,400$.

1. Par quelle relation entre a_n et b_n traduit-on la conservation du volume total d'eau du circuit ?
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \dfrac{3}{4}a_n + 330$.
3. L'algorithme ci-dessous permet de déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle a_n est supérieur ou égal à 1 100.
   Recopier cet algorithme en complétant les parties manquantes.

Variables	:	n est un entier naturel
		a est un réel
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0
		Affecter à a la valeur 800
Traitement	:	Tant que $a < 1\,100$, faire :
		Affecter à a la valeur ...
		Affecter à n la valeur ...
		Fin Tant que
Sortie	:	Afficher n

4. Pour tout entier naturel n, on note $u_n = a_n - 1320$.
   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b. Exprimer u_n en fonction de n.
   En déduire que, pour tout entier naturel n, $a_n = 1320 - 520 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

5. On cherche à savoir si, un jour donné, les deux bassins peuvent avoir, au mètre cube près, le même volume d'eau.
Proposer une méthode pour répondre à ce questionnement.

Exercice 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un volume constant de 2 200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B.
Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de deux pompes.
On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante :

- au départ, le bassin A contient 1 100 m^3 d'eau et le bassin B contient 1 100 m^3 d'eau ;
- tous les jours, 15 % du volume d'eau présent en début de journée dans le bassin B est transféré vers le bassin A ;
- tous les jours, 10 % du volume d'eau présent en début de journée dans le bassin du bassin A est transféré vers le bassin B, et pour des raisons de maintenance, on transfère également 5 m^3 du bassin A vers le bassin B.

Pour tout entier naturel n, on note :

- a_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin A à la fin du n-ième jour de fonctionnement ;
- b_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin B à la fin du n-ième jour de fonctionnement.

On a donc $a_0 = 1100$ et $b_0 = 1100$.
Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante

Partie A

1. Traduire la conservation du volume total d'eau du circuit par une relation liant a_n et b_n.
2. On utilise un tableur pour visualiser l'évolution du volume d'eau dans les bassins.
Donner les formules à écrire et à recopier vers le bas dans les cellules B3 et C3 permettant d'obtenir la feuille de calcul ci-dessous :

	A	B	C
1	Jour n	Volume bassin A	Volume bassin B
2	0	1100,00	1100,00
3	1		
4	2	1 187,50	1 012,50
5	3	1 215,63	984,38
6	4	1 236,72	963,28
7	5	1 252,54	947,46
8	6	1 264,40	935,60
9	7	1 273,30	926,10
10	8	1 279,98	920,02
11	9	1 234,98	915,02
12	10	1 288,74	911,26
13	11	1 291,55	908,45
14	12	1 293,66	906,34
15	13	1 295,25	904,75
16	14	1 296,44	903,56
17	15	1 297,33	902,67
18	16	1 298,00	902,00
19	17	1 298,50	901,50
20	18	1 298,87	901,13

3. Quelles conjectures peut-on faire sur l'évolution du volume d'eau dans chacun des bassins ?

Partie B

On considère la matrice carrée $M = \begin{pmatrix}0,9 & 0,15\\0,1 & 0,85\end{pmatrix}$ et les matrices colonnes $R = \begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}$.
On admet que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = MX_n + R$.

1. On note $S = \begin{pmatrix}1300\\900\end{pmatrix}$.
Vérifier que $S = MS + R$.
En déduire que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} - S = M(X_n - S)$.

Dans la suite, on admettra que, pour tout entier naturel n, $X_n - S = M^n(X_0 - S)$ et que $M^n = \begin{pmatrix}0,6+0,4\times 0,75^n & 0,6-0,6\times 0,75^n\\0,4-0,4\times 0,75^n & 0,4+0,6\times 0,75^n\end{pmatrix}$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $X_n = \begin{pmatrix}1300-200\times 0,75^n\\900+200\times 0,75^n\end{pmatrix}$.

3. Valider ou invalider les conjectures effectuées à la question 3. de la partie A.

4. On considère que le processus est stabilisé lorsque l'entier naturel n vérifie

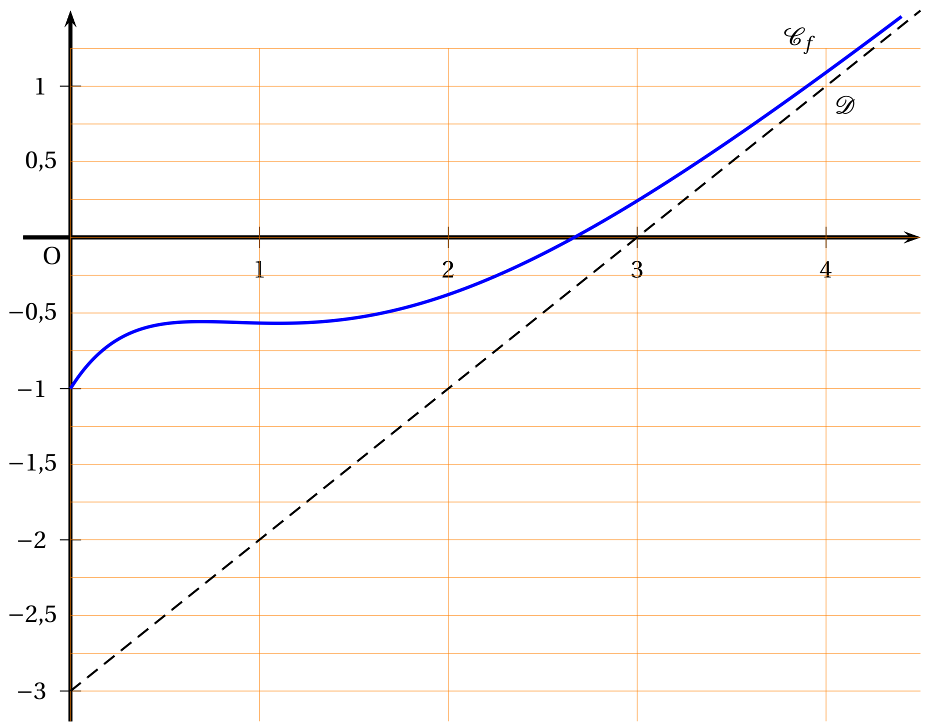
$$1300 - a_n < 1,5 \quad \text{et} \quad b_n - 900 < 1,5.$$

Déterminer le premier jour pour lequel le processus est stabilisé.

Annexe 1

À rendre avec la copie

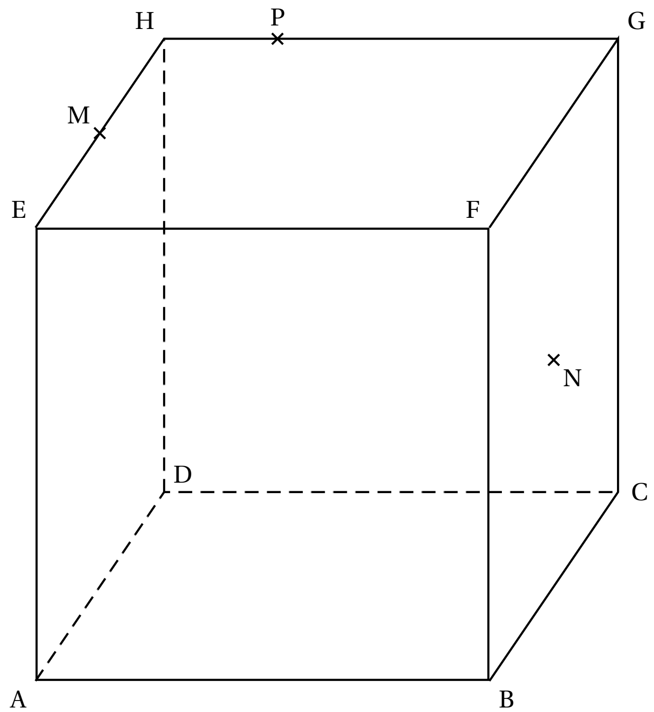
EXERCICE 2



Annexe 2

À rendre avec la copie

EXERCICE 3



EXERCICE 4

[Amérique du Nord 2014]

1. Déterminons la relation entre a_n et b_n:

D'après l'énoncé, un volume constant de 2200 m³ d'eau est réparti entre deux bassins: A et B.

Dans ces conditions, la relation demandée est:

$a_n + b_n = 2200$ m³, avec $a_0 = 800$ et $b_0 = 1400$.

Nous pouvons aussi écrire: $b_n = 2200 - a_n$.

2. Justifions que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \frac{3}{4} a_n + 330$:

D'après l'énoncé:

- 15% du volume de B est transféré vers A,
- 10% du volume de A est transféré vers B.

Nous pouvons ainsi écrire:

- $a_{n+1} = (1 - 10\%) \times a_n + (15\%\ b_n)$

- $b_{n+1} = (1 - 15\%) \times b_n + (10\%\ a_n)$

cad: • $a_{n+1} = 0,9 \times a_n + 0,15 \times b_n$ (a)

- $b_{n+1} = 0,85 \times b_n + 0,1 \times a_n$

Or: $b_n = 2200 - a_n$. (b)

En remplaçant, b_n par l'expression (b) dans (a), on obtient:

$$(a) \iff a_{n+1} = 0,9 \times a_n + 0,15 \times (2200 - a_n)$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = \frac{3}{4} \times a_n + 330.$$

En définitive nous avons bien: $a_{n+1} = \frac{3}{4} \times a_n + 330.$

3. Recopions et complétons l'algorithme:

Les deux lignes manquantes et complétées de la partie " Traitement " sont:

Traitement: **Tant que** $a < 1100$, faire:

| Affecter à a la valeur $\frac{3}{4}a + 330$
| Affecter à n la valeur $n + 1$

Fin du Tant que

4. a. Montrons que la suite (U_n) est géométrique et déterminons U_0 et q:

$$U_n = a_n - 1320 \iff U_{n+1} = a_{n+1} - 1320$$

$$\iff U_{n+1} = \left(\frac{3}{4}a_n + 330\right) - 1320 \quad (1).$$

Or: $U_0 = a_0 - 1320 \Rightarrow U_0 = -520$ et $a_n = U_n + 1320.$

Ainsi: $(1) \iff U_{n+1} = \left(\frac{3}{4}[U_n + 1320] + 330\right) - 1320$

$$\Rightarrow U_{n+1} = \frac{3}{4}U_n.$$

Par conséquent, (U_n) est bien une suite géométrique de raison $q = \frac{3}{4}$ et de premier terme $U_0 = -520.$

4. b. Exprimons (U_n) en fontion de n:

Comme $U_{n+1} = \frac{3}{4} U_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$U_n = U_0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n, \quad \text{avec:} \quad U_0 = -520.$$

4. c. Déduisons-en que pour tout entier naturel n, $a_n = 1320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$:

Nous savons que: * $U_n = -520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$

* $a_n = U_n + 1320.$

D'où: $a_n = 1320 - 520 \left(\frac{3}{4}\right)^n.$

5. Proposons une méthode afin de déterminer le jour où les deux bassins peuvent avoir, au mètre cube près, le même volume d'eau:

Nous savons que: $a_n + b_n = 2\,200 \text{ m}^3.$

Les deux bassins ont le même volume ssi: $a_n = b_n = 1\,100 \text{ m}^3.$

Si nous nous intéressons au bassin A, les deux bassins ont le même volume, au mètre cube près, ssi: $1\,100 - 1 < a_n < 1\,100 + 1.$ (c)

$$\text{(c)} \iff 1099 < 1320 - 520 \left(\frac{3}{4}\right)^n < 1\,101$$

$$\iff 219 < 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n < 221$$

$$\iff 0,4211 < \left(\frac{3}{4}\right)^n < 0,425$$

$$\iff \ln(0,4211) < n \times \ln\left(\frac{3}{4}\right) < \ln(0,425)$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\ln(0,425)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} < n < \frac{\ln(0,4211)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} \quad \left(\frac{3}{4} \in]0;1[\right)$$

$$\Longrightarrow 2,974 < n < 3,006.$$

Au total, nous retiendrons: $n = 3$.

Cela signifie qu'à la fin du troisième jour, les bassins A et B auront le même volume, au mètre cube près.