

# *Sujet + Corrigé*

ANNALES MATHÉMATIQUES BAC S  
SUITES - 2014

SUJET 1  
FRANCE MÉTROPOLITAINE  
BAC S - 2014

CORRECTION RÉALISÉE  
PAR ALAIN PILLER



*alainpiller.fr*

**Annales Mathématiques Bac 2014  
Sujets + Corrigés - Alain Pillier  
France Métropolitaine**

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

**SESSION 2014**

**MATHÉMATIQUES**

**Série S**

**ÉPREUVE DU JEUDI 19 JUIN 2014**

**Durée de l'épreuve : 4 heures**

**Coefficient : 7**

**ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE**

**Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,  
conformément à la réglementation en vigueur.**

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

**EXERCICE 1 (5 points)**  
*Commun à tous les candidats*

**Partie A**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par  $\mathcal{C}_1$  la courbe représentative de la fonction  $f_1$  définie sur  $\mathbf{R}$  par :

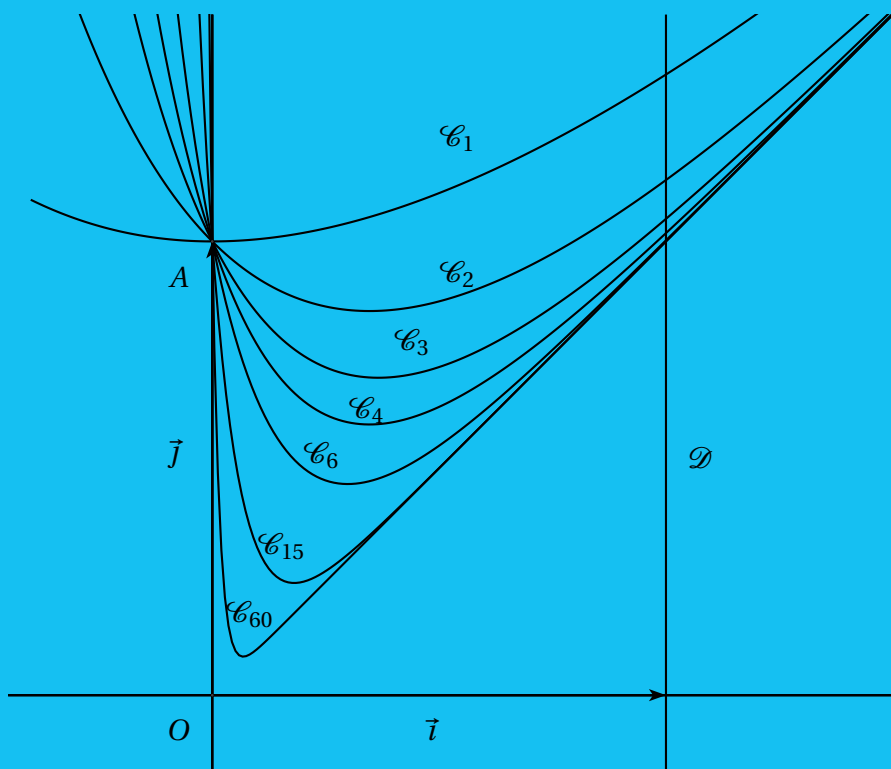
$$f_1(x) = x + e^{-x}$$

1. Justifier que  $\mathcal{C}_1$  passe par le point  $A$  de coordonnées  $(0, 1)$ .
2. Déterminer le tableau de variation de la fonction  $f_1$ . On précisera les limites de  $f_1$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

**Partie B**

L'objet de cette partie est d'étudier la suite  $(I_n)$  définie sur  $\mathbf{N}$  par :  $I_n = \int_0^1 (x + e^{-nx}) dx$ .

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , pour tout entier naturel  $n$ , on note  $\mathcal{C}_n$  la courbe représentative de la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbf{R}$  par  $f_n(x) = x + e^{-nx}$ . Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe  $\mathcal{C}_n$  pour plusieurs valeurs de l'entier  $n$  et la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $x = 1$ .



- a. Interpréter géométriquement l'intégrale  $I_n$ .
- b. En utilisant cette interprétation, formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite  $(I_n)$  et sa limite éventuelle. On précisera les éléments sur lesquels on s'appuie pour conjecturer.

2. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1,

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{-(n+1)x} (1 - e^x) dx.$$

En déduire le signe de  $I_{n+1} - I_n$  puis démontrer que la suite  $(I_n)$  est convergente.

3. Déterminer l'expression de  $I_n$  en fonction de  $n$  et déterminer la limite de la suite  $(I_n)$ .

## EXERCICE 2 (5 points)

### *Commun à tous les candidats*

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

#### Partie A

Un laboratoire pharmaceutique propose des tests de dépistage de diverses maladies. Son service de communication met en avant les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'une personne malade présente un test positif est 0,99 ;
- la probabilité qu'une personne saine présente un test positif est 0,001.

1. Pour une maladie qui vient d'apparaître, le laboratoire élabore un nouveau test. Une étude statistique permet d'estimer que le pourcentage de personnes malades parmi la population d'une métropole est égal à 0,1%. On choisit au hasard une personne dans cette population et on lui fait subir le test.

On note  $M$  l'évènement « la personne choisie est malade » et  $T$  l'évènement « le test est positif ».

- a. Traduire l'énoncé sous la forme d'un arbre pondéré.
  - b. Démontrer que la probabilité  $P(T)$  de l'évènement  $T$  est égale à  $1,989 \times 10^{-3}$ .
  - c. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.  
Affirmation : « Si le test est positif, il y a moins d'une chance sur deux que la personne soit malade ».
2. Le laboratoire décide de commercialiser un test dès lors que la probabilité qu'une personne testée positivement soit malade est supérieure ou égale à 0,95. On désigne par  $x$  la proportion de personnes atteintes d'une certaine maladie dans la population. À partir de quelle valeur de  $x$  le laboratoire commercialise-t-il le test correspondant ?

## Partie B

La chaîne de production du laboratoire fabrique, en très grande quantité, le comprimé d'un médicament.

1. Un comprimé est conforme si sa masse est comprise entre 890 et 920 mg. On admet que la masse en milligrammes d'un comprimé pris au hasard dans la production peut être modélisée par une variable aléatoire  $X$  qui suit la loi normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  de moyenne  $\mu = 900$  et d'écart-type  $\sigma = 7$ .
  - a. Calculer la probabilité qu'un comprimé prélevé au hasard soit conforme. On arrondira à  $10^{-2}$ .
  - b. Déterminer l'entier positif  $h$  tel que  $P(900 - h \leq X \leq 900 + h) \approx 0,99$  à  $10^{-3}$  près.
2. La chaîne de production a été réglée dans le but d'obtenir au moins 97% de comprimés conformes. Afin d'évaluer l'efficacité des réglages, on effectue un contrôle en prélevant un échantillon de 1000 comprimés dans la production. La taille de la production est supposée suffisamment grande pour que ce prélèvement puisse être assimilé à 1000 tirages successifs avec remise.

Le contrôle effectué a permis de dénombrer 53 comprimés non conformes sur l'échantillon prélevé.

Ce contrôle remet-il en question les réglages faits par le laboratoire ? On pourra utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%.

## EXERCICE 3 (5 points)

### *Commun à tous les candidats*

On désigne par  $(E)$  l'équation  $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$  d'inconnue complexe  $z$ .

1. Résoudre dans  $\mathbf{C}$  l'équation  $Z^2 + 4Z + 16 = 0$ .  
Écrire les solutions de cette équation sous une forme exponentielle.
2. On désigne par  $a$  le nombre complexe dont le module est égal à 2 et dont un argument est égal à  $\frac{\pi}{3}$ .  
Calculer  $a^2$  sous forme algébrique.  
En déduire les solutions dans  $\mathbf{C}$  de l'équation  $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$ . On écrira les solutions sous forme algébrique.
3. **Restitution organisée de connaissances**  
On suppose connu le fait que pour tout nombre complexe  $z = x + iy$  où  $x \in \mathbf{R}$  et  $y \in \mathbf{R}$ , le conjugué de  $z$  est le nombre complexe  $\bar{z}$  défini par  $\bar{z} = x - iy$ .  
Démontrer que :
  - Pour tous nombres complexes  $z_1$  et  $z_2$ ,  $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ .
  - Pour tout nombre complexe  $z$  et tout entier naturel non nul  $n$ ,  $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ .

4. Démontrer que si  $z$  est une solution de l'équation  $(E)$  alors son conjugué  $\bar{z}$  est également une solution de  $(E)$ .  
 En déduire les solutions dans  $\mathbf{C}$  de l'équation  $(E)$ . On admettra que  $(E)$  admet au plus quatre solutions.

**EXERCICE 4 (5 points)**

*Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Dans l'espace, on considère un tétraèdre  $ABCD$  dont les faces  $ABC$ ,  $ACD$  et  $ABD$  sont des triangles rectangles et isocèles en  $A$ . On désigne par  $E$ ,  $F$  et  $G$  les milieux respectifs des côtés  $[AB]$ ,  $[BC]$  et  $[CA]$ .

On choisit  $AB$  pour unité de longueur et on se place dans le repère orthonormé  $(A; \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$  de l'espace.

1. On désigne par  $\mathcal{P}$  le plan qui passe par  $A$  et qui est orthogonal à la droite  $(DF)$ .  
 On note  $H$  le point d'intersection du plan  $\mathcal{P}$  et de la droite  $(DF)$ .
  - a. Donner les coordonnées des points  $D$  et  $F$ .
  - b. Donner une représentation paramétrique de la droite  $(DF)$ .
  - c. Déterminer une équation cartésienne du plan  $\mathcal{P}$ .
  - d. Calculer les coordonnées du point  $H$ .
  - e. Démontrer que l'angle  $\widehat{EHG}$  est un angle droit.
  
2. On désigne par  $M$  un point de la droite  $(DF)$  et par  $t$  le réel tel que  $\vec{DM} = t\vec{DF}$ . On note  $\alpha$  la mesure en radians de l'angle géométrique  $\widehat{EMG}$ .  
 Le but de cette question est de déterminer la position du point  $M$  pour que  $\alpha$  soit maximale.
  - a. Démontrer que  $ME^2 = \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4}$ .
  - b. Démontrer que le triangle  $MEG$  est isocèle en  $M$ .  
 En déduire que  $ME \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ .
  - c. Justifier que  $\alpha$  est maximale si et seulement si  $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$  est maximal.  
 En déduire que  $\alpha$  est maximale si et seulement si  $ME^2$  est minimal.
  - d. Conclure.

# EXERCICE 1

[ France Métropolitaine 2014 ]

## Partie B: Intégrales et Suites

### 1. a. Interprétons géométriquement l'intégrale $I_n$ :

D'après l'énoncé, pour tout entier naturel  $n$ :

- $I_n = \int_0^1 (x + e^{-nx}) dx$ ,
- $f_n(x) = x + e^{-nx}$ ,
- $\mathcal{C}_n$  est la courbe représentative de  $f_n$ .

Dans ces conditions, en unités d'aire et à l'unité près, l'intégrale  $I_n$  correspond à l'aire  $\mathcal{A}(n)$  de l'ensemble du domaine délimité par les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = 1$ , l'axe des abscisses et la courbe  $\mathcal{C}_n$ .

### 1. b. Formulons une conjecture sur le sens de variation de la suite $(I_n)$ et sa limite éventuelle:

• La conjecture que nous pouvons émettre quant au sens de variation de la suite  $(I_n)$  est:

" on pourrait, a priori, penser que la suite  $(I_n)$  est strictement décroissante. "

En effet, plus "  $n$  " est grand, plus l'aire  $\mathcal{A}(n)$  diminue.

• La limite de  $(I_n)$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  ?

$(I_n)$  est positive et semble converger vers " $\frac{1}{2}$ " (minorant).

En effet, en  $+\infty$ ,  $I_n$  tend vers  $\int_0^1 x \, dx$  cad:  $\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$ .

**2. a. Démontrons que  $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{-(n+1)x} (1 - e^x) \, dx$ , pour tout entier naturel  $n \geq 1$ :**

D'après l'énoncé, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ :

$$\bullet I_n = \int_0^1 (x + e^{-nx}) \, dx,$$

$$\bullet I_{n+1} = \int_0^1 (x + e^{-(n+1)x}) \, dx.$$

Dans ces conditions:

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 [x + e^{-(n+1)x}] - [x + e^{-nx}] \, dx$$

$$= \int_0^1 [e^{-(n+1)x}] - [e^{-nx}] \, dx$$

$$= \int_0^1 [e^{-(n+1)x}] - [e^x \times e^{-(n+1)x}] \, dx$$

$$\Rightarrow I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{-(n+1)x} (1 - e^x) \, dx.$$

Au total, nous avons bien:  $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{-(n+1)x} (1 - e^x) \, dx$ .

**2. b. Déduisons-en le signe de  $I_{n+1} - I_n$  et montrons que  $(I_n)$  est convergente:**

• Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , et pour tout  $x \in [0;1]$ :

$$\bullet e^{-(n+1)x} > 0$$

$$\bullet (1 - e^x) < 0.$$

Ainsi, pour tout entier naturel  $n \geq 1$  et pour tout  $x \in [0;1]$ :

$$e^{-(n+1)x} (1 - e^x) < 0.$$

D'après le cours, les bornes de l'intégrale sont  $a = 0$  et  $b = 1$ , avec  $a < b$ .



D'où:  $e^{-(n+1)x} (1 - e^x) < 0 \Rightarrow \int_0^1 e^{-(n+1)x} (1 - e^x) < 0.$

Et par conséquent:  $I_{n+1} - I_n < 0$  cad  $I_{n+1} < I_n.$

La suite  $(I_n)$  est donc bien strictement décroissante.

- Comme la suite  $(I_n)$  est strictement décroissante et est minorée par  $m = \frac{1}{2}$ , nous pouvons affirmer que: la suite  $(I_n)$  est convergente.

3. Déterminons l'expression de  $I_n$  en fonction de  $n$  ainsi que la limite de la suite  $(I_n)$ :

- $I_n = \int_0^1 (x + e^{-nx}) dx$   
 $= \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{1}{n} e^{-nx} \right]_0^1$   
 $\Rightarrow I_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n} (1 - e^{-n}).$

Ainsi l'expression de  $I_n$  en fonction de  $n$  est:  $I_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n} (1 - e^{-n}).$

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{n} (1 - e^{-n}) \right)$   
 $= \frac{1}{2}^*$

\* car:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} (1 - e^{-n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} (1 - 0)$   
 $= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}$   
 $= 0.$

Au total: •  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \frac{1}{2},$

- la suite  $(I_n)$  est convergente et converge vers  $L = \frac{1}{2}.$